

雑音のスペクトルの確率密度分布

本資料では、雑音スペクトルの確率密度分布がどのような関数形で表されるのかを考える。この確率密度は、どのようなプロセスで信号が処理されるのかを順に追えば良いが、そのためには、いくつかの確率密度分布の性質について、調べておく必要がある。第1節では、確率密度分布の性質について示し、第2節で、いくつかの雑音スペクトルの確率密度を求める。

なお、確率密度は、スペクトルの大きさの関数であって、周波数の関数ではない点に注意する必要がある。つまり、グラフで表す場合は、横軸と縦軸はそれぞれ、はスペクトルの大きさと確率密度となる。パワースペクトルは、横軸が周波数で、縦軸はスペクトルの大きさであるので、これと混同してはいけない。

1 確率密度関数の性質

1.1 二つの独立確率変数の積の分散

二つの確率変数 X と Y について、それぞれの平均が0、分散を σ_X^2 および σ_Y^2 とする。これらが独立のときの積 XY の分散は

$$\overline{XY} = \overline{X} \cdot \overline{Y} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{XY}^2 = \overline{(XY - \overline{XY})^2} = \overline{X^2 Y^2} = \overline{X^2} \cdot \overline{Y^2} = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \quad (2)$$

となり、それぞれの分散の積と一致する。

1.2 $y = x^2$ による確率密度の変換

変数変換における確率密度の関係は次式で与えられる。

$$p_y(y) |dy| = p_x(x) |dx| \quad (3)$$

二つの確率変数、 x と y が、

$$y = x^2, \quad dy = 2x dx \quad (4)$$

の場合には、 y は x が正の場合と負の場合の両方について同一の値を取り得るので、それぞれの場合の和として、 $p_y(x^2)$ は次のように表される。

$$p_y(x^2) = p_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x>0} + p_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x<0} = \frac{p_x(x)}{2x} \Big|_{x>0} + \frac{p_x(x)}{2(-x)} \Big|_{x<0} \quad (5)$$

$p_x(x)$ が正規分布のように対称な定義域を持つ偶関数の場合には、以下の関係が成り立つ。

$$p_y(x^2) = \frac{p_x(x)}{|x|} \quad (6)$$

1.3 $y = \sqrt{|x|}$ による確率密度の変換

前節と同様に二つの確率変数, x と y が,

$$y = \sqrt{|x|}, \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{|x|}} \right) \quad (7)$$

の場合について, $p_y(y)$ を求めると, x の変域に応じて,

$$p_y(\sqrt{|x|}) = p_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x>0} + p_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x<0} = (p_x(x)\sqrt{x})_{x>0} + (p_x(x)\sqrt{-x})_{x<0} \quad (8)$$

と求められ, $p_x(x)$ が対称な場合には, 次式が成り立つ。

$$p_y(\sqrt{|x|}) = 2\sqrt{|x|} p_x(x) \quad (9)$$

1.4 $\theta \sim U[-\pi/2, +\pi/2]$ に対する $\cos \theta, \sin \theta$ の確率密度関数

一様乱数 $\theta \sim U[-\pi/2, +\pi/2]$ により,

$$f_{\cos}(\theta) = \cos \theta, \quad f_{\sin}(\theta) = \sin \theta \quad (10)$$

で発生された $f(\theta)$ の密度関数を求める。確率密度の積分量の保存から,

$$p_f(f) |df| = p_\theta(\theta) |d\theta| \quad (11)$$

と与えられる。微小量同士の関係を f で表す。

$$\left| \frac{df_{\cos}}{d\theta} \right| = |-\sin \theta| = \sqrt{1 - f_{\cos}^2} \quad (12)$$

$$\left| \frac{df_{\sin}}{d\theta} \right| = |+\cos \theta| = \sqrt{1 - f_{\sin}^2} \quad (13)$$

となり, $\cos \theta, \sin \theta$ のどちらの場合も, 同じ変換係数となる ($f_{\cos}, f_{\sin}$ を区別せずに f と記す)。
 $p_\theta(\theta)$ は θ に依存せず, $f(\theta)$ の定義域を考慮すると

$$p_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi} \quad (14)$$

となるので,

$$p_f(f) = \frac{d\theta}{df} p_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - f^2}} \quad (15)$$

を得る。この関数は偶関数である。

f の分散は,

$$\sigma_f^2 = \overline{f^2} - \bar{f}^2 \quad (16)$$

により求める。平均操作は密度関数 $p_f(f)$ を掛けて積分すれば良い。 $\bar{f}$ は $p_f(f)$ の偶関数性より、ただちに

$$\bar{f} = \int_{-1}^1 f p_f(f) df = 0 \quad (17)$$

が得られる。また、 $\overline{f^2}$ は

$$\begin{aligned} \overline{f^2} &= \int_{-1}^1 f^2 p(f) df = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f^2}{\sqrt{1-f^2}} df = \frac{1}{2\pi} \left[-f\sqrt{1-f^2} + \arcsin f \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2\pi} [\arcsin f]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

となり、これらから分散を次のように求めることができる。

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2} \quad (19)$$

1.5 二つの独立確率変数の和の確率密度

この節では、二つの確率変数を足した場合の確率密度がどうなるかについて考える。この内容は、本論である雑音の確率密度を求める方法とし後述する手順では用いてない。しかし、別の導出方法を採用する場合には、有用となるかも知れない。また、確率密度とは何かを理解する助けにもなり、さらに例題では興味深い結果を示している。

二つの確率変数 (X, Y) から (Z, W) への変換を考える。これらの間には、

$$z = x + y, \quad w = y \quad (20)$$

が成り立っているとすると、確率密度の保存から

$$p_{Z,W}(z, w) dz dw = p_X(x) p_Y(y) dx dy = p_X(x) p_Y(y) ||J|| dz dw \quad (21)$$

が成り立つ。ここで $||J||$ は、ヤコビアン の絶対値であり、

$$||J|| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{array} \right\| = 1 \quad (22)$$

である。したがって、

$$p_{Z,W}(z, w) dz dw = p_X(x(z, w)) p_Y(y(z, w)) dx dy = p_X(z - w) p_Y(w) dz dw \quad (23)$$

となり、両辺を w で積分すれば、

$$p_{X+Y}(z) dz \equiv \int p_{Z,W}(z, w) dw dz = \int p_X(z - w) p_Y(w) dw dz \quad (24)$$

となり、両辺を dz で割ればの畳み込み積分で確率密度が表されていることが解る。

$$p_{X+Y}(z) = \int p_X(z - w) p_Y(w) dw \quad (25)$$

右辺の積分核は、和が $z = x + y$ となるための、実現値 $(z - w)$ と実現値 w の同時確率密度を表していると考えればよい。

1.5.1 二つの正規分布確率密度の和の確率密度

以降、正規分布を $g(x, \sigma)$ と記す。

$$g(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (26)$$

確率変数 X, Y がともに同じ $N[0, \sigma^2]$ の正規分布をしている場合について、(25) 式を w により積分すると、和の確率密度は、

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(z) &= \int p_{Z,W}(z, w) dw = \int p_X(z - w) p_Y(w) dw = \int g(z - w, \sigma) g(w, \sigma) dw \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int e^{-\frac{2(w-z/2)^2 + z^2/2}{2\sigma^2}} dw \\ &\quad \left(\int e^{-\frac{2(w-z/2)^2 + z^2/2}{2\sigma^2}} dw = e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} \int e^{-\frac{(w-z/2)^2}{2(\sigma/\sqrt{2})^2}} dw = e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} \left(\sqrt{2\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{4\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2}\sigma)} \exp\left(-\frac{z^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}\right) = g\left(z, \sqrt{2}\sigma\right) \end{aligned} \quad (27)$$

のように求められる。つまり、同じ正規分布に従う確率変数の和は、やはり正規分布となり、分散が2倍 (標準偏差は $\sqrt{2}$ 倍) に大きくなる。なお、分散については、このような計算をしなくても、 X, Y が独立なとき、 $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ が成り立つことを用いれば明らかである。

この元の確率分布を一様分布とした場合には、三角形関数となる。さらにこれに一様乱数を加えること繰り返し、正規分布との差を求めれば徐々に差が小さくなることが解る。これは、中心極限定理、すなわち、「任意の確率分布に従う複数の確率変数の和は正規分布に収束する」の一例を証明したこととなる。

2 雑音のスペクトルの確率密度分布

2.1 フーリエ変換の次元とスケーリング

フーリエ変換には、順変換と逆変換が一致するようになるための条件のみでは、さまざまな係数の選びかたに任意性が残る。実空間の変量 $x(t)$ ($t \in [0, T]$) を M 項のフーリエ級数で表し、その展開係数 X_m が $x(t)$ と同じ次元を持つように選べば、

$$x(t) = \sum_{m=0}^{M-1} X_m e^{j2\pi f_m t} \quad (28)$$

$$X_m = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f_m t} dt \quad (29)$$

で与えられる。 $x(t)$ を Δt 間隔の離散点 $x_i = x(t_i)$ のみで定義し、 $T = M\Delta t$ を用いれば、離散フーリエ変換 (DFT) としての一つの表示が以下のように得られる。

$$x_i = \sum_{m=0}^{M-1} X_m e^{+j2\pi f_m t_i} \quad (30)$$

$$X_m = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_i e^{-j2\pi f_m t_i} \quad (31)$$

この表示では、ある周波数 (f_m) の正弦波成分の振幅が、そのまま X_m として表されるが、形が対称ではない。DFT ではそれぞれの変換の右辺の総和記号の前の係数の積が $1/M$ となっていれば、順変換と逆変換を作用させれば元に戻るので、さまざまな組合せが考えられる。例えば、 x_i は変えず ($x'_i = x_i$)、 $X'_m = \sqrt{M} X_m$ とすれば

$$x'_i = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} X'_m e^{+j2\pi f_m t_i} \quad (32)$$

$$X'_m = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{M-1} x'_i e^{-j2\pi f_m t_i} \quad (33)$$

のように対称な表示が得られる。この表示において

$$M = \frac{1}{\Delta f \Delta t} \quad (34)$$

を用いて

$$\hat{x}_i = \frac{x'_i}{\sqrt{\Delta t}}, \quad \hat{X}_m = \frac{X'_m}{\sqrt{\Delta f}} \quad (35)$$

のような次元の異なる変量を定義すれば、

$$\hat{x}_i = \sum_{m=0}^{M-1} \hat{X}_m e^{+j2\pi f_m t_i} \quad (36)$$

$$\hat{X}_m = \sum_{i=0}^{M-1} \hat{x}_i e^{-j2\pi f_m t_i} \quad (37)$$

が成り立つ。この関係からパーセバルの公式とその離散表示を以下のように表すことができる。

$$\int |\hat{x}(t)|^2 dt = \int |\hat{X}(f)|^2 df \quad (38)$$

$$\sum_i |\hat{x}_i|^2 \Delta t = \sum_m |\hat{X}_m|^2 \Delta f \quad (39)$$

2.2 インパルス列による白色雑音のフーリエ変換

積分強度 n_i で $t = t_i$ にピークを持つ単一のインパルスは、 δ 関数を用いて

$$n_k(t) = n_k \delta(t - t_k) \Delta t \quad (40)$$

と表される。ここで、 Δt はインパルスの幅であり、離散系ではサンプリング間隔に相当し、 $\delta(t)$ は $1/t$ の次元を持っている。 $n_k(t)$ の $t \pm \Delta t/2$ の時間平均を求めると

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_i - \Delta t/2}^{t_i + \Delta t/2} n_k(t) dt = n_k \quad (41)$$

となる。つまり、 n_k はインパルスの Δt の間の時間平均を表している。単純に、離散系では $\delta(t_i - t_k)\Delta t = \delta_{i,k}$ と置き換えることができると考えても良い。雑音の振幅 n_k は、平均が 0、分散が σ_n^2 の確率密度 $p_n(n)$ に従うものとする。

白色雑音 $x(t)$ を時刻と強度の異なる複数の単一インパルスの和で与える。

$$x(t) = \sum_{k=0}^{M-1} n_k(t) = \sum_{k=0}^{M-1} n_k \delta(t - t_k) \Delta t \quad (42)$$

この離散形は次式で表される。

$$x_i = \sum_{k=0}^{M-1} n_k \delta_{i,k} \quad (43)$$

このフーリエ変換を、パーセバルの公式を満たす形式、すなわち (32) 式、(33) 式で与えれば、

$$X_m = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{M-1} \left(\sum_{k=0}^{M-1} n_k e^{-j2\pi f_m t_k} \delta_{i,k} \right) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{M-1} n_i e^{-j2\pi f_m t_i} = \sum_{i=0}^{M-1} Y_{i,m} \quad (44)$$

$$Y_{i,m} = n_i \frac{1}{\sqrt{M}} \exp(-j2\pi f_m t_i) \quad (45)$$

と表すことができる。

2.3 $\Re[X]$ および $\Im[X]$ の確率密度

$Y_{i,m}$ の実部、ならびに、虚部の分散は、いずれも、 $p_n(n)$ と、 $p_{\cos}(\theta)$ あるいは $p_{\sin}(\theta)$ の分布を持つ二つの確率変数の積で表される。 $p_{\cos}(\theta) = p_{\sin}(\theta)$ なので、実部と虚部の分散はともに (2) 式および (19) 式より

$$\sigma_{\Re[Y_{i,m}]}^2 = \sigma_{\Im[Y_{i,m}]}^2 = \frac{1}{M} \sigma_n^2 \sigma_f^2 = \frac{\sigma_n^2}{2M} \quad (46)$$

となる。 X は、実部ならびに虚部はともにランダム信号の加算で与えられるので、確率密度関数の形は、 n の確率密度 $p_n(n)$ に依存せず、中心極限定理により正規分布になる。その分散は、各信号 $Y_{i,m}$ の分散の和で与えられるので、

$$\sigma_{X_{\Re}}^2 = \sum_{i=0}^{M-1} \sigma_{\Re[Y_{i,m}]}^2 = \sigma_{\Re[Y_{i,m}]}^2 = \frac{\sigma_n^2}{2} \quad (47)$$

となる。つまり、フーリエ空間の実部と虚部はともに標準偏差が $\sigma_n/\sqrt{2}$ の正規分布となり、実空間の標準偏差 σ_n より小さくなっている。

$$p_{\Re[X_m]}(x) = p_{\Im[X_m]}(x) = g\left(x, \frac{\sigma_n}{\sqrt{2}}\right) \quad (48)$$

この原因は、 $\cos \theta$ あるいは $\sin \theta$ の確率密度関数の分散が $1/2$ になっているためである。なお、導出の過程で示したが、実空間の確率密度の分布には依存しない点も重要である。

2.4 $|X(f)|^2$ の確率密度

雑音のパワー $|X_m|^2$ の確率密度を評価する。

$$|X_m|^2 = \Re[X_m]^2 + \Im[X_m]^2 \quad (49)$$

この評価法として、 $p_{\Re[X_m]}(x)$ および $p_{\Im[X_m]}(y)$ のそれぞれの自乗の $p_{\Re[X_m]}^2(x^2)$, $p_{\Im[X_m]}^2(y^2)$ を計算しこれらの分布関数の和を求める方法が考えられるが、難しく、筆者もうまくいっていない。別のアプローチとしては、(44) 式から確率密度を求める方法も考えられるが、こちらは、三つの分布関数の積の計算が現れ、これも難しい。

もっとも簡単な方法は、積分確率密度を用いる方法であろう。これは熱力学における気体分子速度のマクスウェル分布と同様の評価方法である。 $|X_m|^2$ が r^2 より小さくなる積分確率密度 $P_{|X_m|^2}(r)$ は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} P_{|X_m|^2}(r^2) &= \iint_{x^2+y^2 < r^2} p_{\Re[X_m]}(x)p_{\Im[X_m]}(y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{(\sqrt{\pi}\sigma)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) r d\theta dr = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_n^2}\right) \end{aligned} \quad (50)$$

これを r^2 で微分すれば、確率分布が得られる。 r をあらためて $|X_m|$ と記せば

$$p_{|X_m|^2}(|X_m|^2) = \frac{dP_{|X_m|^2}(|X_m|^2)}{d(|X_m|^2)} = \frac{1}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{|X_m|^2}{\sigma_n^2}\right) \quad (51)$$

となる。 $|X_m|$ に着目すると、定義域が正のみである点、および、係数を除けば正規分布をしていることが解る。つまり、縦軸に $\log(p_{|X_m|^2}(|X_m|^2))$ を選べば上に凸の放物線となり、さらに横軸に $|X_m|^2$ を選べば傾きが負の直線になる。

参考までに、 $|X_m|^2$ の平均と分散を示す。これらは $p_{|X_m|^2}$ を重みとして求めれば良い。

$$\begin{aligned} \overline{|X_m|^2} &= \int_0^\infty |X_m|^2 \frac{1}{\sigma_n^2} e^{-\frac{|X_m|^2}{\sigma_n^2}} d|X_m|^2 = \sigma_n^2 \int_0^\infty Y \exp(-Y) dY \\ &= \sigma_n^2 \left([-Y e^{-Y}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-Y} dY \right) = \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \overline{|X_m|^4} &= \int_0^\infty |X_m|^4 \frac{1}{\sigma_n^2} e^{-\frac{|X_m|^2}{\sigma_n^2}} d|X_m|^2 = \sigma_n^4 \int_0^\infty Y^2 \exp(-Y) dY \\ &= \sigma_n^4 \left([-Y^2 e^{-Y}]_0^\infty + 2 \int_0^\infty Y e^{-Y} dY \right) = 2\sigma_n^4 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\sigma_{|X_m|^2}^2 = \overline{|X_m|^4} - \overline{|X_m|^2}^2 = \sigma_n^4 \quad (54)$$

が得られる。以上から、 $|X_m|^2$ の平均は雑音の分散に等しく、分散は雑音の分散の自乗に等しいことが解る。

2.5 $|X(f)|$ の確率密度

前節と同様に積分域を考慮した積分から求められるかも知れないが，ここでは，より簡単な，変数変換を用いる。(9) 式を用いれば次式を得る。

$$p_{|X_m|}(|X_m|) = \frac{2|X_m|}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{|X_m|^2}{\sigma_n^2}\right) \quad (55)$$

この分布は $|X_m| = 0$ と $|X_m| = \infty$ にて 0 となり， $|X_m| = \sigma_n/\sqrt{2}$ で極大をもつ。残念ながら，こちらをグラフから容易に判断することは難しい。

平均と分散はモーメントの e^{-x^2} に関する積分公式

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}} \quad (56)$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (57)$$

を用いれば，

$$\overline{|X_m|} = \int_0^\infty |X_m| \frac{2|X_m|}{\sigma_n^2} e^{-\frac{|X_m|^2}{\sigma_n^2}} d|X_m| = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_n}{2} \quad (58)$$

$$\overline{|X_m|^2} = \int_0^\infty |X_m|^2 \frac{2|X_m|}{\sigma_n^2} e^{-\frac{|X_m|^2}{\sigma_n^2}} d|X_m| = \sigma_n^2 \quad (59)$$

$$\sigma_{|X_m|}^2 = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_n^2 \quad (60)$$

を得る。(52) 式で表した $p_{|X_m|^2}$ の一次モーメントと，(59) 式で表した $p_{|X_m|}$ の二次モーメントが一致している点は興味深い。