

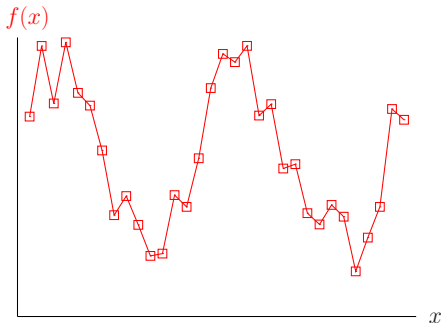
5. 移動平均による雑音の低減

測定データ (雑音を含む)

$$f(x_i) = \tilde{f}(x_i) + n(x_i)$$

$$(i \in \{1, \dots, N_{all}\})$$

誤差除去法	平均値の数
全体の平均	1つ
M グループでの平均	$M < N_{all}$
移動平均	$N'_{all} \sim N_{all}$



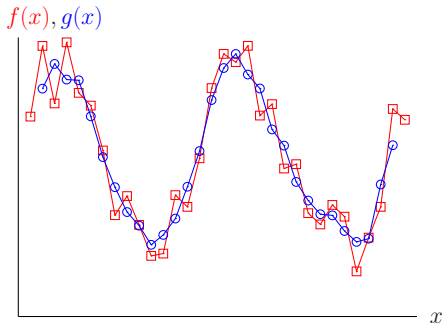
5. 移動平均による雑音の低減

測定データ (雑音を含む)

$$f(x_i) = \tilde{f}(x_i) + n(x_i)$$

$$(i \in \{1, \dots, N_{all}\})$$

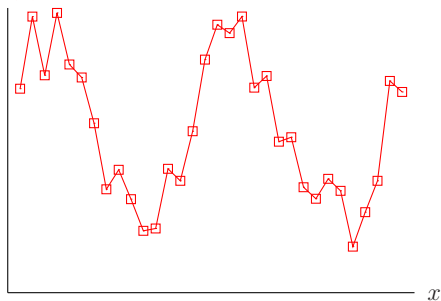
誤差除去法	平均値の数
全体の平均	1つ
M グループでの平均	$M < N_{all}$
移動平均	$N'_{all} \sim N_{all}$



5.1 移動平均

サンプリンググループを徐々に移動させながら平均を取る

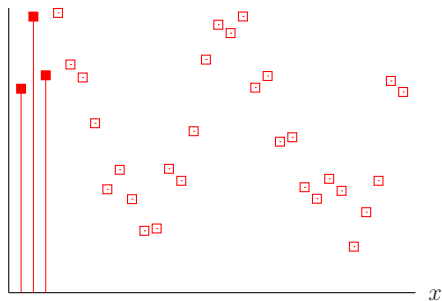
$f(x)$



5.1 移動平均

サンプリンググループを徐々に移動させながら平均を取る

$f(x)$

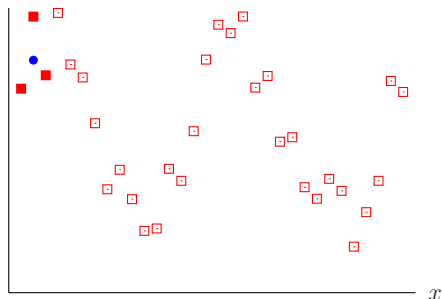


(3点による移動平均の例)

5.1 移動平均

サンプリンググループを徐々に移動させながら平均を取る

$f(x), g(x)$



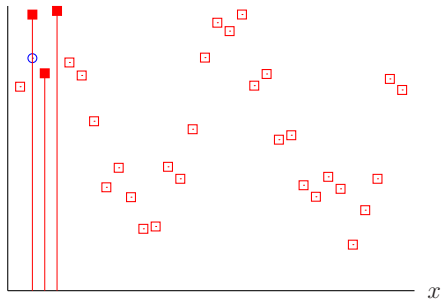
(3点による移動平均の例)

$$g_2 = (f_1 + f_2 + f_3)/3$$

5.1 移動平均

サンプリンググループを徐々に移動させながら平均を取る

$f(x), g(x)$



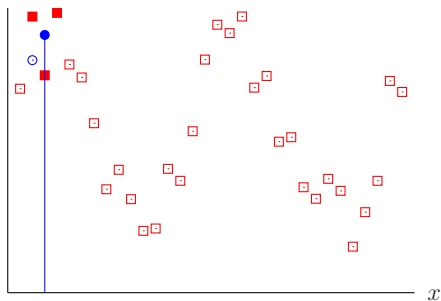
(3点による移動平均の例)

$$g_2 = (f_1 + f_2 + f_3)/3$$

5.1 移動平均

サンプリンググループを徐々に移動させながら平均を取る

$f(x), g(x)$



(3点による移動平均の例)

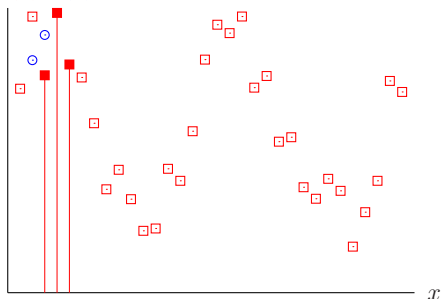
$$g_2 = (f_1 + f_2 + f_3)/3$$

$$g_3 = (f_2 + f_3 + f_4)/3$$

5.1 移動平均

サンプリンググループを徐々に移動させながら平均を取る

$f(x), g(x)$



(3点による移動平均の例)

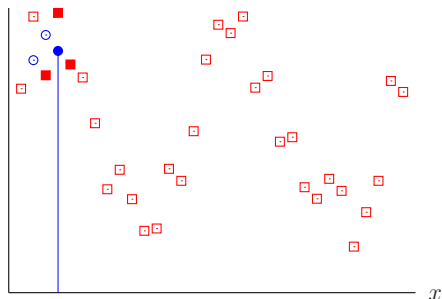
$$g_2 = (f_1 + f_2 + f_3)/3$$

$$g_3 = (f_2 + f_3 + f_4)/3$$

5.1 移動平均

サンプリンググループを徐々に移動させながら平均を取る

$f(x), g(x)$



(3点による移動平均の例)

$$g_2 = (f_1 + f_2 + f_3)/3$$

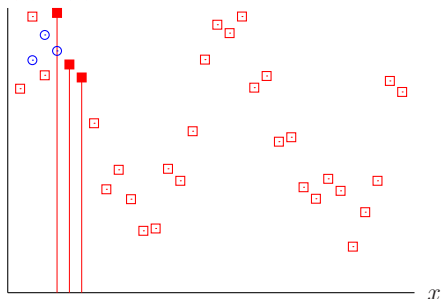
$$g_3 = (f_2 + f_3 + f_4)/3$$

$$g_4 = (f_3 + f_4 + f_5)/3$$

5.1 移動平均

サンプリンググループを徐々に移動させながら平均を取る

$f(x), g(x)$



(3点による移動平均の例)

$$g_2 = (f_1 + f_2 + f_3)/3$$

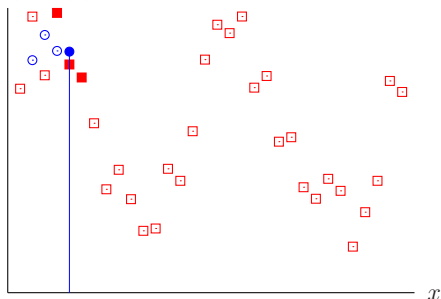
$$g_3 = (f_2 + f_3 + f_4)/3$$

$$g_4 = (f_3 + f_4 + f_5)/3$$

5.1 移動平均

サンプリンググループを徐々に移動させながら平均を取る

$f(x), g(x)$



(3点による移動平均の例)

$$g_2 = (f_1 + f_2 + f_3)/3$$

$$g_3 = (f_2 + f_3 + f_4)/3$$

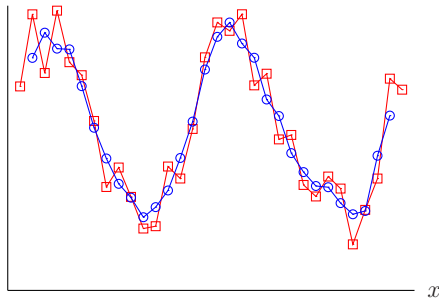
$$g_4 = (f_3 + f_4 + f_5)/3$$

$$g_5 = (f_4 + f_5 + f_6)/3$$

5.1 移動平均

サンプリンググループを徐々に移動させながら平均を取る

$f(x), g(x)$



(3点による移動平均の例)

$$g_2 = (f_1 + f_2 + f_3)/3$$

$$g_3 = (f_2 + f_3 + f_4)/3$$

$$g_4 = (f_3 + f_4 + f_5)/3$$

$$g_5 = (f_4 + f_5 + f_6)/3$$

⋮

$$g_i = (f_{i-1} + f_i + f_{i+1})/3$$

$$g_i = \sum_{m'} w_{m'} f_{i+m'} = \sum_m w_m f_{i-m}$$

5.2 移動平均と畳み込み積分の関係

移動平均 \equiv 離散たたみこみ積分

$g(x)$: averaged, $f(x)$: observed

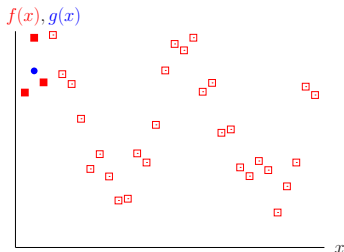
連続系: $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x') f(x - x') dx'$ (たたみ込み積分)

離散系: $g_i = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m f_{i-m} \Delta x$ ($f_i \equiv f(x_i)$)

m が有限個 ($N_m = 2N + 1$) の場合

$$g_i = \sum_{m=-N}^N \hat{w}_m f_{i-m} \quad (\hat{w}_m = w_m \Delta x) \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x') dx' = 1 \quad (\text{規格化}) \quad (2)$$



5.3 単純移動平均

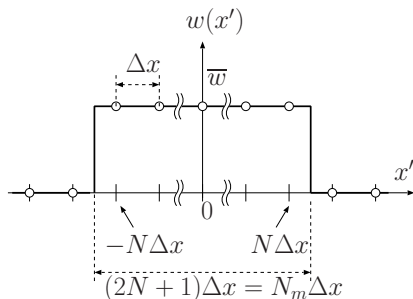
窓の内側の重み ($w(x')$) を一定

$$w(x') = \begin{cases} \text{const} = \bar{w} & \left(|x'| \leq \frac{N_m \Delta x}{2} \right) \\ 0 & \text{(elsewhere)} \end{cases}$$

規格化条件 Eq.(2) より

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w(x') dx' &= N_m \Delta x \bar{w} \\ &= N_m \hat{w} = 1 \end{aligned}$$

$$\hat{w}_m = \begin{cases} \frac{1}{N_m} & (|m| \leq N) \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$



雑音低減の比較 (元信号)

$$\text{元の信号 } f_i = \tilde{f}_i + n_i$$

(f : obs., \tilde{f} : true (一意), n : noise)

(無限回の測定:
 f_i^j ($j \in \{1, \dots, \infty\}$))

- 測定回数 j に関する平均:

$$E[f_i] = E[\tilde{f}_i + n_i] = \underbrace{E[\tilde{f}_i]}_{=\tilde{f}_i} + \underbrace{E[n_i]}_{=0} = \tilde{f}_i$$

- 分散:

$$\begin{aligned} \sigma_{f_i}^2 &= E[(f_i - E[f_i])^2] \\ &= E[((\tilde{f}_i + n_i) - \tilde{f}_i)^2] \\ &= E[n_i^2] = \sigma_{n_i}^2 = \sigma_n^2 \end{aligned}$$

分散を求める別の方法

信号 a, b が無相関のとき,

$$\sigma_{a \pm b}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2.$$

\tilde{f}_i と n_i は無相関で,

さらに \tilde{f}_i は一意なので $\sigma_{\tilde{f}_i}^2 = 0$.

$$\therefore \sigma_{f_i}^2 = \sigma_{\tilde{f}_i}^2 + \sigma_{n_i}^2 = \sigma_n^2$$

雑音低減の比較 (移動平均)(1)

$$\text{移動平均} \quad g_i = \frac{1}{N_m} \sum_m f_{i-m} \equiv \langle f_i \rangle_m$$

$$f_i = \tilde{f}_i + n_i \rightarrow g_i = \langle \tilde{f}_i \rangle_m + \langle n_i \rangle_m$$

- 測定回数 j に関する平均:

$$\text{E}[g_i] = \text{E}[\langle \tilde{f}_i \rangle_m] + \text{E}[\langle n_i \rangle_m] = \underbrace{\langle \text{E}[\tilde{f}_i] \rangle_m}_{=\tilde{f}_i} + \underbrace{\langle \text{E}[n_i] \rangle_m}_{=0} = \langle \tilde{f}_i \rangle_m$$

- 分散:

$$\begin{aligned} \sigma_{g_i}^2 &= \text{E}[(g_i - \text{E}[g_i])^2] = \text{E}\left[\left\{\left(\langle \tilde{f}_i \rangle_m + \langle n_i \rangle_m\right) - \langle \tilde{f}_i \rangle_m\right\}^2\right] = \text{E}[\langle n_i \rangle_m^2] \\ &= \text{E}\left[\left(\frac{\sum_m n_{i-m}}{N_m}\right) \cdot \left(\frac{\sum_m n_{i-m}}{N_m}\right)\right] = \text{E}\left[\frac{\sum_m \sum_{m'} n_{i-m} n_{i-m'}}{N_m^2}\right] \\ &= \frac{1}{N_m^2} \sum_m \sum_{m'} \text{E}[n_{i-m} n_{i-m'}] \end{aligned}$$

分散は、ノイズの自己相関関数に依存する。

雑音低減の比較 (移動平均)(2)

雑音の性質による分散の違い

$$\sigma_{g_i}^2 = \frac{1}{N_m^2} \sum_m \sum_{m'} \mathbb{E}[n_{i-m} n_{i-m'}]$$

- 白色雑音の場合:

(n_{i-m} と $n_{i-m'}$ は無相関)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[n_{i-m} n_{i-m'}] &= \sigma_n^2 \delta_{m,m'} \\ \sigma_{g_i}^2 &= \frac{\sigma_n^2}{N_m^2} \sum_m \sum_{m'} \delta_{m,m'} \\ &= \frac{\sigma_n^2}{N_m} \underbrace{\sum_m \sum_{m'} \delta_{m,m'}}_{N_m} \end{aligned}$$

- 低周波雑音の場合

($n_{i-m} \simeq n_{i-m'}$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[n_{i-m} n_{i-m'}] &\simeq \sigma_n^2 \\ \sigma_{g_i}^2 &\simeq \frac{\sigma_n^2}{N_m^2} \sum_m \sum_{m'} 1 \\ &= \sigma_n^2 \underbrace{\sum_m \sum_{m'} 1}_{N_m^2} \end{aligned}$$

雑音低減の比較(まとめ)

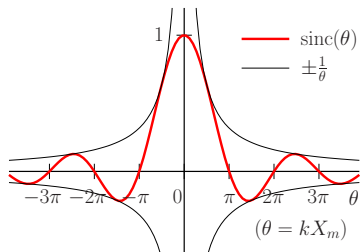
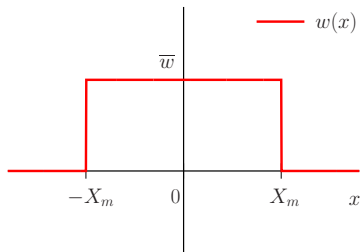
	元信号	移動平均	
平均	\tilde{f}_i	$\langle \tilde{f}_i \rangle_m$ 真の信号を平滑化してしまう(欠点)	
分散	σ_n^2	白色雑音(ベスト)	低周波雑音(最悪)
		$\frac{\sigma_n^2}{N_m}$ 1/ N_m 倍に小さくなる (利点)	σ_n^2 小さくならない

単純移動平均の周波数特性

$w(x')$ のフーリエ変換

$$w(x') = \bar{w} \equiv \frac{1}{2X_m} \left(|x'| \leq X_m = \frac{N_m \Delta x}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} W(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x') e^{-ikx'} dx' \\ &= \frac{1}{2X_m} \int_{-X_m}^{X_m} e^{-ikx'} dx' \\ &= \frac{1}{-2ikX_m} (e^{-ikX_m} - e^{+ikX_m}) \\ &= \frac{\sin(kX_m)}{kX_m} = \text{sinc}(kX_m) \end{aligned}$$



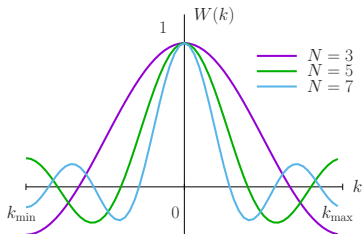
単純移動平均の周波数特性 (つづき)

$$g(x) = w(x) * f(x)$$

$$G(k) = W(k) \cdot F(k)$$

$$W(k) = \text{sinc}(kX_m)$$

$$(X_m = \frac{N_m \Delta x}{2})$$



移動平均は高周波成分を低減する。

ただし

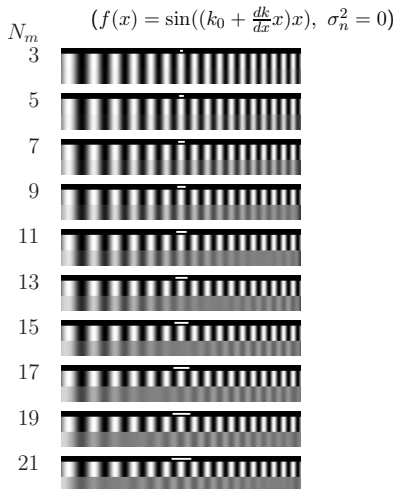
$$G(k) = W(k)F(k) = W(k) [\tilde{F}(k) + N(k)]$$

$$= W(k)\tilde{F}(k) + W(k)N(k)$$

ノイズ ($n(x)$) と真の信号 ($\tilde{f}(x)$) の区別はできず、
真の信号の高周波成分も低減されるため、真の信号も歪む。

5.4 移動平均による歪みと偽解像

移動平均による真の信号の歪み



- 移動平均のサンプリング数 N_m を増やすと高周波の振幅が小さくなる

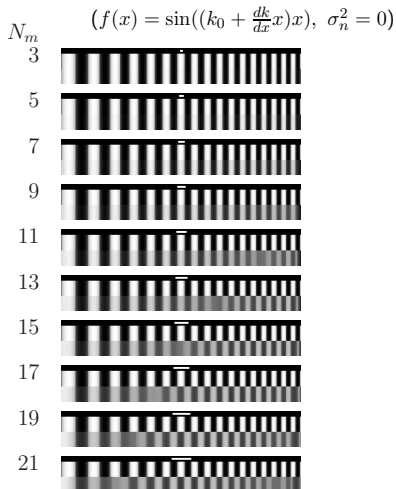


適切な N_m を選択する必要

- N_m が大きいとき、高周波側で再び振幅が大きくなり、正負の反転が現れる (偽解像)

5.4 移動平均による歪みと偽解像

移動平均による真の信号の歪み



(コントラスト強調)

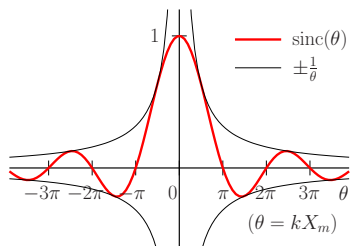
- 移動平均のサンプリング数 N_m を増やすと高周波の振幅が小さくなる



適切な N_m を選択する必要

- N_m が大きいとき、高周波側で再び振幅が大きくなり、正負の反転が現れる (偽解像)

偽解像の原因



k が大きくなると

$W(k)$ が $kX_m = \pi$ で 0 になり、
その後、負になる。

$W(k) < 0 \rightarrow$ 振幅の反転

偽解像は他のフィルタリングでも
発生する場合がある。