

3.6 乱数による雑音の生成

理想的な乱数: 周期性がない → 白色

- 計算機シミュレーション: 模擬雑音の生成等で乱数が必要。
正規乱数の場合が多い。
- 計算機に予め実装されているものは、一様乱数のみ。
一様乱数の表記: $X \sim U[\min, \max]$
予め実装されているもの,
(生成される乱数 X は $X \in [0, 1]$ の値をとり,
得られる X の確率はどの場合も同じ。)
- 一様乱数から正規乱数を生成する方法
 - ▶ 複数の一様乱数の和
 - ▶ 一様乱数の座標変換
 - ▶ 多次元確率分布関数を用いる方法

独立事象に関する確率

- 確率変数: X

$X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (離散系)

$X \in [x_{\min}, x_{\max}]$ (連続系)

- 確率密度関数: $p(x)$

$X = x$ となる確率:

(連続系の場合, $p(x) dx$ で考える)

- 分布関数:

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$$

$$(P(X < \infty) = 1)$$

- X の平均 (期待値):

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx$$

- X の関数の平均:

$$\overline{f(X)} = E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x) dx$$

- X の分散:

$$\sigma_x^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$$\left(\begin{aligned} \overline{(x - \bar{x})^2} &= \int (x - \bar{x})^2 p(x) dx \\ &= \int (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2) p(x) dx \\ &= \underbrace{\int x^2 p(x) dx}_{=\overline{x^2}} - \underbrace{2\bar{x} \int x p(x) dx}_{=2\bar{x}} + \underbrace{\bar{x}^2 \int p(x) dx}_{=\bar{x}^2} \\ &= \overline{x^2} - \bar{x}^2 \end{aligned} \right)$$

- 二つの独立事象の同時確率密度:

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1) p_2(x_2)$$

$$\triangleright \overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

$$\triangleright \sigma_{x_1+x_2}^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 \quad (\text{独立な場合})$$

$$\triangleright \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \quad (\text{独立な場合})$$

一様乱数の和による正規乱数の生成

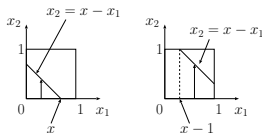
中心極限定理 (Central limit theorem)

独立な同一の分布に従う確率変数の算術和は、正規分布に収束する。
(例外あり、一様分布は可。)

● $X_u \sim U[0, 1] \rightarrow p(x) = 1$

● 二つの一様分布の和:

$$F(x) = P(X_1 + X_2 < x) = \iint_{x_1 + x_2 < x} dx_1 dx_2$$



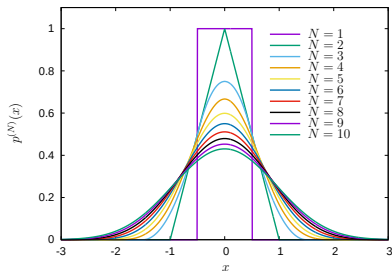
$0 < x \leq 1$ の場合:

$$F(x) = \int_{x_1=0}^x \int_{x_2=0}^{x-x_1} dx_2 dx_1 = \frac{x^2}{2}$$

$1 < x \leq 2$ の場合:

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\int_{x_1=0}^{x-1} \int_{x_2=0}^1 + \int_{x_1=x-1}^1 \int_{x_2=0}^{x-x_1} \right) dx_2 dx_1 \\ &= -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \end{aligned}$$

$$p(x) = \begin{cases} x & (0 < x \leq 1) \\ 2 - x & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$



- $X_u \sim U[0, 1] \rightarrow p(x) = 1$

- 平均と分散

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{x_u} = \int_0^1 x_u dx_u = \frac{1}{2} \\ \sigma_{x_u}^2 = \int_0^1 (x_u - \overline{x_u})^2 dx_u = \overline{x_u^2} - \overline{x_u}^2 \\ \quad = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{array} \right.$$

- $X = \sum_{n=1}^N X_u$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \sum_{n=1}^N \overline{x_u} = \frac{N}{2} \\ \sigma_x^2 = \sum_{n=1}^N \sigma_{x_u}^2 = \frac{N}{12} \end{array} \right.$$

$N = 12$ とすれば,

$$X = \sum_{n=1}^{12} X_u - 6 \sim N[0, 1]$$

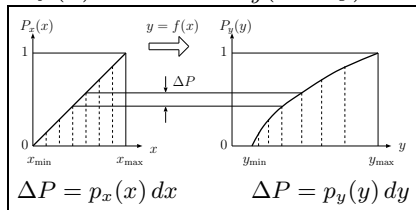
の正規乱数が得られる。

$\left(N[\bar{x}, \sigma_x^2] : \right.$
 平均が $\bar{x}$, 分散が σ_x^2 の
 正規分布 $\left. \right)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}$$

座標変換による任意の確率分布

分布関数 $P_x(X < x)$ を
 $y = f(x)$ で変換 $\rightarrow P_y(Y < y)$



$$p_x(x) dx = p_y(y) dy$$

$p_x(x) = 1$ ($0 \leq x < 1$) の一様乱数から $p_y(y)$ となる変換 $f(x)$ を求めればよい。

指数関数分布

$$p_y(y) = e^{-y}$$

$$dx = e^{-y} dy$$

$$\rightarrow x = -e^{-y} \rightarrow y = -\log x$$

x を一様乱数で生成し,
 $y = -\log x$ を求めれば,
 指数分布乱数が得られる。

正規乱数

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1 + \operatorname{erf}(\frac{y}{2})}{2}$$

$$\rightarrow y = 2 \operatorname{erf}^{-1}(2x - 1)$$

erf^{-1} は計算機に実装されていない。

Box-Muller 法による正規乱数

多次元確率分布:

$$\begin{aligned} p_y(y_1, y_2, \dots) dy_1 dy_2 \dots &= p_x(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots \\ &= p_x(x_1, x_2, \dots) |J| dy_1 dy_2 \dots \end{aligned}$$

x_1, x_2 を独立な一様乱数とする

$$X_1, X_2 \sim U[0, 1]$$

$$(p_x(x_1, x_2) = p_x(x_1)p_x(x_2) = 1)$$

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{-2 \log x_1} \cos(2\pi x_2) \\ y_2 = \sqrt{-2 \log x_1} \sin(2\pi x_2) \end{cases} \quad (1)$$

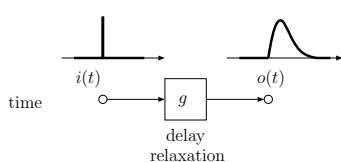
このときの x_1, x_2

$$\begin{cases} x_1 = e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}} \\ x_2 = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \end{cases}$$

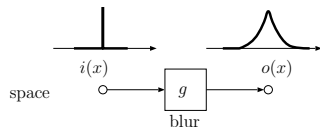
$$\begin{aligned} |J| &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} \right) \\ &= p_y(y_1) p_y(y_2) \end{aligned}$$

二つの $U[0, 1]$ の一様乱数 (x_1, x_2) を,
(1) 式により変換した (y_1, y_2) は,
 $N[0, 1]$ の正規分布乱数になっている。

4. たたみ込み積分と応答関数



$$\begin{aligned}
 o(t) &= \int_0^{\infty} g(\tau) i(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t i(\tau) g(t - \tau) d\tau \equiv g(t) * i(t) \equiv (g * i)(t)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 o(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) i(x - \xi) d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} i(\xi) g(x - \xi) d\xi \equiv g(x) * i(x) \equiv (g * i)(x)
 \end{aligned}$$

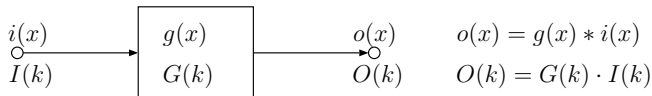
- 入力の原因，出力が結果とみなすことができ，出力は入力を積分したもの
- システムの応答は絶対的な時刻には依存せず，入力と出力の時間差に依存
- 出力は，入力と，時間差で決まる重みを乗じたものの積分 → たたみこみ積分
- 時間と空間の違いは積分領域のみ (因果律)

※ 相関関数と似ているがアーギュメントの順序が異なる点に注意

4.1 合成積定理

合成積定理

$o(x)$ が $g(x)$, $i(x)$ のたたみ込み積分で与えられるとき

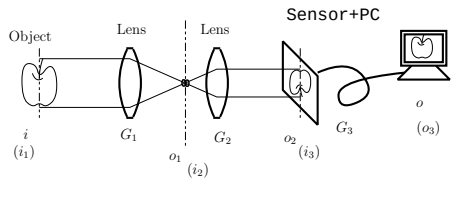


$$\begin{cases} F(k) = \int f(x) e^{-ikx} dx \\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int F(k) e^{ikx} dk \end{cases}$$

$$o(x) = \int_{\xi} g(\xi) i(x - \xi) d\xi$$

$$\begin{aligned} O(k) &= \int_x o(x) e^{-ikx} dx \\ &= \int_x \left(\int_{\xi} g(\xi) i(x - \xi) d\xi \right) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{\xi} g(\xi) \left(\int_x i(x - \xi) e^{-ikx} dx \right) d\xi \\ &= \int_{\xi} g(\xi) \left(\int_x i(x - \xi) e^{-ik(x - \xi)} dx e^{-ik\xi} \right) d\xi \\ &\quad (x' = x - \xi) \\ &= \left(\int_{\xi} g(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right) \cdot \left(\int_{x'} i(x') e^{-ikx'} dx' \right) \\ &= G(k) \cdot I(k) \end{aligned}$$

4.2 応答関数



$$\begin{aligned}
 o_n(\mathbf{r}) &= \int g_n(\boldsymbol{\xi}) i_n(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\
 &= (g_n * i_n)(\mathbf{r}) = i_{n+1}(\mathbf{r}) \\
 O_n(\mathbf{k}) &= G_n(\mathbf{k}) I_n(\mathbf{k}) = I_{n+1}(\mathbf{k})
 \end{aligned}$$

$$o(\mathbf{r}) = (g_N * (\cdots * (g_1 * i)))(\mathbf{r}), \quad O(\mathbf{k}) = \left(\prod_{n=1}^N G_N(\mathbf{k}) \right) I(\mathbf{k})$$

- システム全体の応答関数の FT は、
個々のコンポーネントの応答関数の FT の積と等しい。
- 個々のコンポーネントの応答関数が解っていれば、
出力 $o(\mathbf{r})$ から入力 $i(\mathbf{r})$ を求めることができる。

応答関数の測定

- ピンホール ($i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$) の応答関数

$$o(\mathbf{r}) = \int g(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \delta(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = g(\mathbf{r})$$

$$O(\mathbf{k}) = G(\mathbf{k})$$

$o(\mathbf{r})$: Point Spread Function

$O(\mathbf{k})$: Point Response Function

- スリット ($i_x(\mathbf{r}) = \delta(x)$) の応答関数

$o_x(\mathbf{r})$: Line Spread Function

$O_x(\mathbf{k})$: Line Response Function

理想的なピンホール, または, スリット?

- エッジ ($i_e(\mathbf{r}) = \theta(x)$) の応答関数

(θ : ステップ関数, $\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)$)

$$o_e(x) = \int g_x(x - \xi) \theta(\xi) d\xi = \int g_x(\xi') \theta(x - \xi') d\xi'$$

$$\begin{aligned} \frac{do_e(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \int g_x(\xi') \theta(x - \xi') d\xi' \\ &= \int g_x(\xi') \underbrace{\frac{d\theta(x - \xi')}{d(x - \xi')}}_{\delta(x - \xi')} \underbrace{\frac{d(x - \xi')}{dx}}_{=1} d\xi' \\ &= \int g_x(\xi') \delta(x - \xi') d\xi' = g_x(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_x(k_x) &= \int g_x(x) e^{-ik_x x} dx = \int \frac{do_e}{dx} e^{-ik_x x} dx \\ &= \underbrace{\left[o_e(x) e^{-ik_x x} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \quad (\because o_e(\pm\infty)=0)} + ik_x \int o_e(x) e^{-ik_x x} dx \\ &= ik_x O_e(k_x) \end{aligned}$$

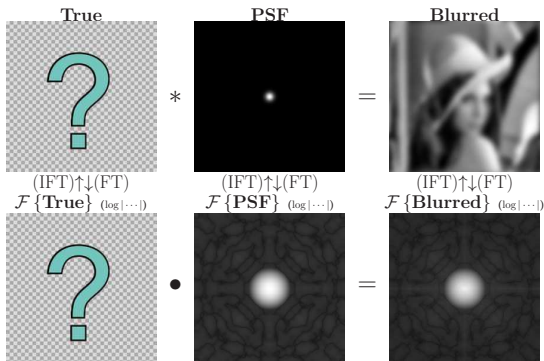
$O_e(\mathbf{k})$: Edge Response Function

4.3 逆たたみ込みの概念

ぼけた画像 (Blurred) とシステム全体の PSF が得られている。

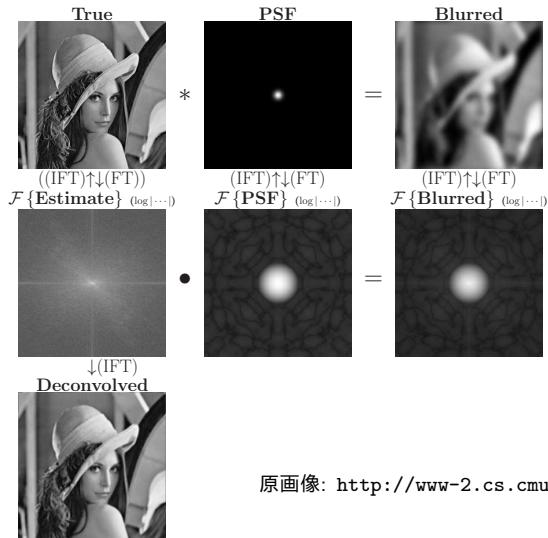
→ $\mathcal{F}\{\text{Blurred}\}$ と $\mathcal{F}\{\text{PSF}\}$ も既知

原画像 (True) を復元したい。



$$\text{True}' = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}\{\text{Blurred}\}}{\mathcal{F}\{\text{PSF}\}} \right\} \text{により求められる。 (Deconvolution)}$$

ぼけた画像の復元例



$\mathcal{F}\{\text{Blurred}\} / \mathcal{F}\{\text{PSF}\}$
 において、分母が小さい
 場合に発散

↓
 これを避けるために、
 特殊な処理 (後日説明) を
 しているため、
 True $\neq$ Deconvolved

(※ この例では、PSF も
 未知として Blurred の
 みから復元している)

原画像: http://www-2.cs.cmu.edu/~chuck/lennapgl/lena_std.tif