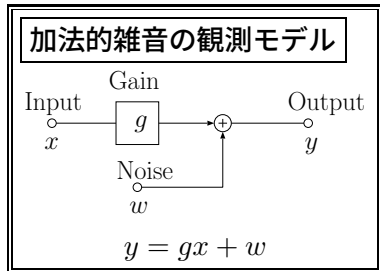


3. 雑音

3.1 加法的雑音の観測モデル



N 回の測定

$$y^{(n)} = gx^{(n)} + w^{(n)}, \quad n \in \{1, \dots, N\}$$

$$\begin{pmatrix} y^{(n)} & : \text{既知} \\ x^{(n)}, w^{(n)} & : \text{未知} \end{pmatrix}$$

- x と w は独立 (無相関)
- 期待値と分散の定義

期待値 :

$$\mathrm{E}[f] \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^{(n)} \equiv \bar{f}$$

分散 :

$$\sigma_f^2 \equiv \mathrm{E}[(f - \bar{f})^2]$$

- $\bar{x}$, $\bar{w}$ と $\bar{y}$, あるいは σ_x^2 , σ_w^2 と σ_y^2 の関係は ?

加法的雑音観測モデルの観測値の統計

$$y = gx + w$$

● 期待値

$$\bar{y} = E[y] = E[gx + w] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum (gx^{(n)} + w^{(n)}) = gE[x] + E[w] = g\bar{x} + \bar{w}$$

● 分散

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[(gx + w) - \bar{y}]^2 = E[(gx + w) - (g\bar{x} + \bar{w})]^2 = E[(g(x - \bar{x}) + (w - \bar{w}))^2] \\ &= g^2 \underbrace{E[(x - \bar{x})^2]}_{=\sigma_x^2} + 2g \underbrace{E[(x - \bar{x})(w - \bar{w})]}_{=0 \text{ (}\because E[xw] = \bar{x} \cdot \bar{w})} + \underbrace{E[(w - \bar{w})^2]}_{=\sigma_w^2} = g^2 \sigma_x^2 + \sigma_w^2 \end{aligned}$$

一般に $\bar{w} = 0$, $\sigma_w^2 > 0$. 測定を繰り返し $N \rightarrow \infty$ とすると,

- $\bar{y} = g\bar{x}$

→ 雑音の影響を取り除くことができる。

- $\sigma_y^2 = g^2 \sigma_x^2 + \sigma_w^2 > g^2 \sigma_x^2$

→ 雑音によるバラツキは取り除くことができない。

3.2 ランダム変動の分類

$\left\{ \begin{array}{l} \text{定常 (stationary)} \\ \text{非定常} \end{array} \right.$	エルゴード的 (ergodic)
	非エルゴード的 (not ergodic)
	非エルゴード的

- 複数の時系列信号の観測

$$(f^{(n)}(t), n \in \{1, \dots, N\})$$

$$\bar{f}(t) = E[f(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^{(n)}(t)$$

$$\begin{aligned} C(t, \tau) &= E[f(t)f(t+\tau)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^{(n)}(t)f^{(n)}(t+\tau) \end{aligned}$$

- ▶ 定常 :

$$\bar{f}(t) = \bar{f}', \quad C(t, \tau) = C'(\tau)$$

(t に依存しない)

- 時系列信号の一つについて

$$\langle f \rangle^{(n)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{(n)}(t) dt$$

$$\begin{aligned} C^{(n)}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^{(n)}(t)f^{(n)}(t+\tau) dt \end{aligned}$$

- ▶ エルゴード的 :

$$\langle f \rangle^{(n)} = \bar{f}', \quad C^{(n)}(\tau) = C'(\tau)$$

3.3 雑音のスペクトル

白色雑音

定常・エルゴード的なランダム信号

$$(\langle n(t) \rangle = 0, \sigma_n^2 = \langle n^2(t) \rangle = \overline{n^2} > 0)$$

白色雑音 : $\tau \neq 0$ では無相関な雑音

- 自己相関関数 : $C(\tau) = \langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{n^2} \delta(\tau) \Delta t \quad (1)$
(Δt は次元をあわせるため)
- パワースペクトル : $S(\omega) = \int \overline{n^2} \delta(\tau) \Delta t e^{-j\omega\tau} d\tau = \overline{n^2} \Delta t \quad (2)$
→ スペクトルが一定 $\Leftrightarrow$ 白色
- 他の全ての信号との相互相関は 0

$$C_{nf}(\tau) = \langle n(t)f(t+\tau) \rangle = \underbrace{\langle n(t) \rangle}_{=0} \langle f(t+\tau) \rangle = 0 \quad (3)$$

ブラウニアンノイズ ($1/f^2$ 雑音)

- 一次マルコフ過程 (少し前 (周辺) の性質に引きつられる過程)

$$r(t + \Delta t) = \rho r(t) + n(t) \quad (4)$$

($0 < \rho < 1$, $\Delta t > 0$, $n(t)$: white noise)

- 自己相関関数

$$C(\tau) = \langle r(t)r(t+\tau) \rangle$$

$$\begin{aligned} C(\tau + \Delta t) &= \langle r(t)r(t+\tau+\Delta t) \rangle \\ &= \langle r(t) \{ \rho r(t+\tau) + n(t+\tau) \} \rangle \\ &= \rho \langle r(t)r(t+\tau) \rangle + \langle r(t)n(t+\tau) \rangle \\ &= \rho C(\tau) \end{aligned}$$

テーラー展開と比較 ($\tau > 0$)

$$C(\tau + \Delta t) = C(\tau) + \frac{dC}{d\tau} \Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$\rightarrow \rho C = C + \frac{dC}{d\tau} \Delta t$$

$$\rightarrow \frac{1}{C} dC = - \underbrace{\frac{1-\rho}{\Delta t}}_{=\alpha} d\tau = -\alpha d\tau$$

$$C(\tau) = C_0 e^{-\alpha \tau}$$

$C(\tau)$ の偶関数性より

$$C(\tau) = C_0 e^{-\alpha |\tau|} \quad (5)$$

C_0 は Eq.(4) より以下のように求められる。

$$\langle r^2(t + \Delta t) \rangle = \langle (\rho r(t) + n(t))^2 \rangle$$

$$C_0 = \rho^2 C_0 + \sigma_n^2$$

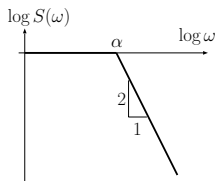
$$\therefore C_0 = \frac{\sigma_n^2}{1 - \rho^2} \quad (6)$$

● パワースペクトル

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \int_{-\infty}^0 C_0 e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} C_0 e^{(-\alpha - j\omega)t} dt \\
 &= C_0 \left(\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{-1}{-\alpha - j\omega} \right) = \frac{2C_0\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\text{ローレンツ分布} \propto \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2}$$

$$S(\omega) \propto \begin{cases} \text{const} & (\omega \ll \alpha) \\ \frac{1}{\omega^2} \propto \frac{1}{f^2} & (\omega \gg \alpha) \end{cases} \quad (8)$$



● 呼びかた

- ▶ Red Noise ← 白色に比べ高周波 (短波長) 成分が弱い
- ▶ Brownian noise (茶色の brown ではない)
← (ブラウン運動 (ランダムウォーク) の位置スペクトル)
- ▶ ローレンツ型雑音 (Lorentzian Noise)

● 例: 熱雑音

$1/f$ 雑音

$$S(\omega) \propto \frac{1}{\omega} \text{ の雑音} \quad (\ast |X(\omega)| \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}} \neq \frac{1}{\omega})$$

$1/f$ 揺らぎに相当するシグナル

- 金属の抵抗 (キャリア数の揺らぎ)
- 川のせせらぎ音
- 木目の間隔

メカニズムはあまり解明されていない。

(別名) Pink noise (White と Red の中間的なスペクトル)

3.4 観測値の自己相関関数

$$s'(t) = s(t) + n(t)$$

$s(t)$: 真の信号 (未知) $C_s(\tau)$ も未知

$n(t)$: 白色雑音 (未知) $C_n(\tau) = \overline{n^2}\delta(\tau)\Delta t$ は既知

$s'(t)$: 観測値 (既知) $C_{s'}(\tau)$ も既知

$$\begin{aligned} C_{s'}(\tau) &= \langle s'(t)s'(t+\tau) \rangle = \langle \{s(t) + n(t)\}\{s(t+\tau) + n(t+\tau)\} \rangle \\ &= \underbrace{\langle s(t)s(t+\tau) \rangle}_{=C_s(\tau)} + \underbrace{\langle n(t)s(t+\tau) \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle s(t)n(t+\tau) \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle n(t)n(t+\tau) \rangle}_{=C_n(\tau)} \\ &= C_s(\tau) + \overline{n^2}\delta(\tau)\Delta t \end{aligned}$$

$$\therefore C_s(\tau) = C_{s'}(\tau) - \overline{n^2}\delta(\tau)\Delta t$$

ノイズの性質が解っていれば、真の信号の自己相関関数は求められる。

3.5 雑音の強度分布

- 白色，赤色等はスペクトルを表している。
これは，実空間の周期性を表しており，瞬時の信号の強さの分布を表しているわけではない。
- 雑音強度の分布を表す量は，確率密度分布 p に相当する。
(分布関数の関数形と，そのパラメータ (標準偏差等))
- 確率密度で良く使われるもの：
 - ▶ 正規分布 (ガウス分布)
 - ▶ 一様分布
- 雑音の性質を示すには，スペクトルと分布関数の両方が必要
(例: 白色正規分布雑音 (分布の幅を表す標準偏差も必要))