1.3 高速フーリエ変換 (FFT)

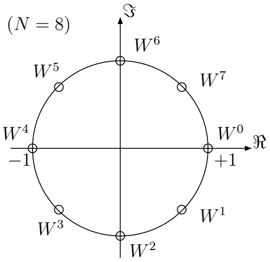
$$\hat{F}_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}mn} \tag{17}$$

$$F_m \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} f_n \underbrace{e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}}_{W^{mn}} \qquad \left(\hat{F}_m = \frac{1}{N}F_m\right)$$

$$W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$$

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{mn}$$

(FFT: Fast Fourier Transform)



$N = 2^p$ $(p \in \mathbb{N})$ の場合， $W^{mn\pm N/2} = -W^{mn}$ が成り立つ。
これを利用して共通項を括り出せば，乗算回数を減らすことができる。

f_n を $n \in \{0, \cdots, N-1\}$ が偶数のグループと奇数のグループに分ける。

$$f^e_{n'} = f_{2n'}, \quad f^o_{n'} = f_{2n'+1} \qquad (n' \in \{0, 1, ..., N/2-1\})$$

$$\left(\begin{aligned} F_m &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{mn} = \sum_{n'=0}^{N/2-1} f^e_{n'} W^{2mn'} + \sum_{n'=0}^{N/2-1} f^o_{n'} W^{m(2n'+1)} \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} f^e_n W^{2mn}}_{f^e_n \text{の } N/2 \text{ 点の DFT} \equiv F^e_m} + W^m \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} f^o_n W^{2mn}}_{f^o_n \text{の } N/2 \text{ 点の DFT} \equiv F^o_m} = F^e_m + W^m F^o_m \end{aligned} \right)$$

$(m \to N/2 + m$ に置き換え$)$

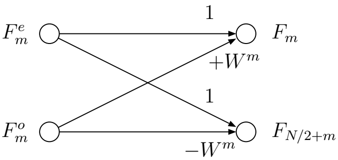
$$\left(\begin{aligned} F_{\frac{N}{2}+m} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} f^e_n \overbrace{W^{2(N/2+m)n}}^{W^{2mn}} + \overbrace{W^{N/2+m}}^{-W^m} \sum_{n=0}^{N/2-1} f^o_n \overbrace{W^{2(N/2+m)n}}^{W^{2mn}} \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} f^e_n W^{2mn}}_{f^e_n \text{の } N/2 \text{ 点の DFT} \equiv F^e_m} - W^m \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} f^o_n W^{2mn}}_{f^o_n \text{の } N/2 \text{ 点の DFT} \equiv F^o_m} = F^e_m - W^m F^o_m \end{aligned} \right)$$

バタフライ演算

$$F_m^{\left\{ e \atop o \right\}} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_n^{\left\{ e \atop o \right\}} W^{2nm} \tag{22}$$

$$\begin{cases} F_m = F_m^e + W^m F_m^o \\ F_{N/2+m} = F_m^e - W^m F_m^o \end{cases} \tag{23}$$

$$(m \in \{0, \cdots, N/2-1\})$$



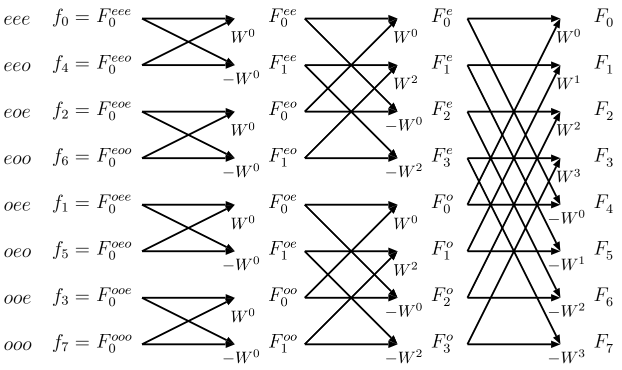
バタフライ演算

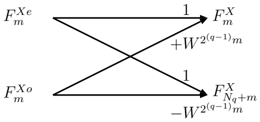
- F_m^e と F_m^o が既知であれば，F_m および $F_{N/2+m}$ を求めることができる。
- F_m および $F_{N/2+m}$ を求めるためには，それぞれ $N/2$ 回ずつの乗算が必要で，その和は N 回
- F_m^e と F_m^o を求めるためには...

F_m^e および F_m^o をさらに m の偶奇で分ける。さらにその結果をわける。…

- 1 回目 $(N_1 = N/2)$ $F_{\left\{ {m \atop m+N_1} \right\}} = F_m^e \pm W^m F_m^o$
- 2 回目 $(N_2 = N/2^2)$ $F^x_{\left\{ {m \atop m+N_2} \right\}} = F_m^{xe} \pm W^{2m} F_m^{xo}$ $\qquad (x \in \{e, o\})$
- 3 回目 $(N_3 = N/2^3)$ $F^{x_1 x_2}_{\left\{ {m \atop m+N_3} \right\}} = F_m^{x_1 x_2 e} \pm W^{2^2 m} F_m^{x_1 x_2 o}$ $\qquad (x_0, x_1 \in \{e, o\})$
- q 回目 $(N_q = N/2^q)$ $F^{\boldsymbol{X}}_{\left\{ {m \atop m+N_q} \right\}} = F_m^{\boldsymbol{X} e} \pm W^{2^{(q-1)} m} F_m^{\boldsymbol{X} o}$ $\qquad (\boldsymbol{X} = (x_0\ x_1\ \cdots x_{q-2}), x_i \in \{e, o\})$

$\begin{pmatrix} p=3 \\ N=8 \end{pmatrix}$ $\quad q=3,\ N_q=1 \quad q=2,\ N_q=2 \quad q=1,\ N_q=4$





$X = (x_0, \ldots, x_{p-q-1})$

$x_i \in \{e, o\}$

乗算回数:

$$N/\text{段} \times p\ \text{段} = N \log_2 N$$

ビットリバース法

$F_m^{\boldsymbol{X}}$ と f_n の関係 (e.g. $N=8, p=3$)

F_m^{eo} (偶数番目をピックアップした後の、奇数番目)								
0 (0)	1 (1)	2 (2)	3 (3)	4 (4)	5 (5)	6 (6)	7 (7)	の中の偶数番目を選択 (e)
0 (0)		2 (1)		4 (2)		6 (3)		の中の奇数番目を選択 (o)
		2 (0)				6 (1)		$\to F_m^{eo}$: f_2, f_6 の二点の FT
F_0^{eoo} (偶数番目をピックアップした後、奇数番目の中の、さらに奇数番目)								
						6		$\to F_0^{eoo}$:f_6 の一点の FT

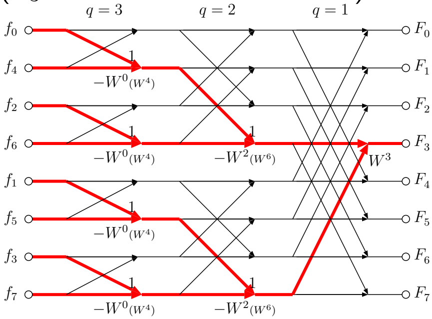
ビットリバース法

(a)	偶奇	eee	eeo	eoe	eoo	oee	oeo	ooe	ooo
(b)		$e \to 0,\ o \to 1$							
	二進	000	001	010	011	100	101	110	111
	(十進)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
(c)	逆順	000	100	010	110	001	101	011	111
	(十進)	(0)	(4)	(2)	(6)	(1)	(5)	(3)	(7)

ビットの逆順のを求めれば f_n に関する n のリストを作れる。

FFT 演算例

(F_3 を求めるための演算経路)



経路の積 ($W^8=1, -1=W^4$)					確認用		
始点	1 段目	2 段目	3 段目	積 ○	n	$3n$	$3n\%8$ ○
f_0	1	1	1	$1=W^0$	0	0	0
f_4	$-W^0$	1	1	$-W^0=W^4$	4	12	4
f_2	1	$-W^2$	1	$-W^2=W^6$	2	6	6
f_6	$-W^0$	$-W^2$	1	W^2	6	18	2
f_1	1	1	W^3	W^3	1	3	3
f_5	$-W^0$	1	W^3	$-W^3=W^7$	5	15	7
f_3	1	$-W^2$	W^3	$-W^5=W^1$	3	9	1
f_7	$-W^0$	$-W^2$	W^3	W^5	7	21	5

○の列が一致していることが確認できる。

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{nm}$$

FFT の利用方法

- FFT はデータ数が $N = 2^p$ のときのみしか適用できない。
- $N \neq 2^p$ $(2^{p-1} < N < 2^p)$ の場合でも FFT を利用したい場合
  - $N' = 2^{p-1}$ となるように，
    両端あるいは一方の端の情報の少なさそうなデータを削る。
  - $N' = 2^p$ となるように，
    $f_n = f^\dagger$ $(n \in N, ..., 2^p)$ のデータを追加 (padding)
    $\left(\text{padding data } f^\dagger \text{の選び方: } \bar{f}(\text{平均}),\ 0,\ \frac{f_0 + f_{N-1}}{2}\right)$
  - 必要に応じて，追加 (削除) の前か後に，窓関数を乗じる

FFT のまとめ

- データ数が $N = 2^p$ のとき，
  バタフライ演算を組み合わせて乗算回数を減らすことができる。
- 乗算回数の比較

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{Mul}}(\mathrm{FFT}) &= N \log_2 N \\ N_{\mathrm{Mul}}(\mathrm{DFT}) &= N^2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad N_{\mathrm{Mul}}(\mathrm{FFT}) \ll N_{\mathrm{Mul}}(\mathrm{DFT})$$

  N が大きくなるほど、FFT の高速化が顕著になる。

  e.g.

N	32	1024	32768
DFT	~ 1000	$\sim 10^6$	$\sim 10^9$
FFT	160	$\sim 10^4$	$\sim 5 \times 10^5$

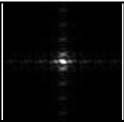
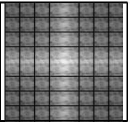
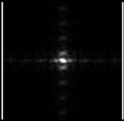
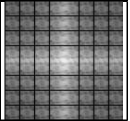
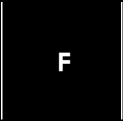
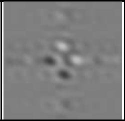
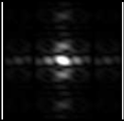
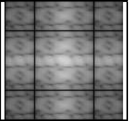
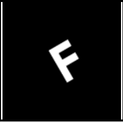
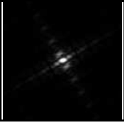
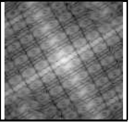
- 2 次元画像 $(N_x \times N_y)$ の場合，内側の FFT のみが高速化可能

$$N_{\mathrm{Mul}}(\mathrm{FFT}) = N_x N_y (\log_2 N_x + \log_2 N_y)$$

$$N_{\mathrm{Mul}}(\mathrm{DFT}) = N_x N_y (N_x + N_y)$$

1.4 フーリエ変換の性質

フーリエ変換の例 (原点: 中心)

Ope.	$f(\boldsymbol{r}) \in \mathbb{R}$	$\Re\{F(\boldsymbol{k})\}$	$\Im\{F(\boldsymbol{k})\}$	$\lvert F(\boldsymbol{k})\rvert$	$\log \lvert F(\boldsymbol{k})\rvert$
Orig.					
Shift					
Scale down					
Rotation					

対称性

$$f(\boldsymbol{r}) = a(\boldsymbol{r}) + ib(\boldsymbol{r}) \quad (a, b \in \mathbb{R},\ f \in \mathbb{C})$$

$$F(\boldsymbol{k}) = A(\boldsymbol{k}) + iB(\boldsymbol{k}) \quad (A, B, F \in \mathbb{C})$$

$$= A + iB \qquad ((\boldsymbol{k})\ \text{を省略})$$

$$F(\boldsymbol{k}) \triangleq \int f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r}$$

$$\left(\begin{array}{l} \begin{Bmatrix} A(\boldsymbol{k}) \\ B(\boldsymbol{k}) \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} a(\boldsymbol{r}) \\ b(\boldsymbol{r}) \end{Bmatrix} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} \\ \begin{Bmatrix} A(-\boldsymbol{k}) \\ B(-\boldsymbol{k}) \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} a(\boldsymbol{r}) \\ b(\boldsymbol{r}) \end{Bmatrix} e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} \end{array} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} A(-\boldsymbol{k}) \\ B(-\boldsymbol{k}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A^*(\boldsymbol{k}) \\ B^*(\boldsymbol{k}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A^* \\ B^* \end{Bmatrix}$$

$$F^*(\boldsymbol{k}) = A^* - iB^*$$

$$F(-\boldsymbol{k}) = A^* + iB^* \neq F^*(\boldsymbol{k})$$

$$|F(\boldsymbol{k})|^2 = (A + iB)^*(A + iB)$$

$$= (|A|^2 + |B|^2) + i(A^*B - AB^*)$$

$$|F(-\boldsymbol{k})|^2 = (A^* + iB^*)^*(A^* + iB^*)$$

$$= (|A|^2 + |B|^2) - i(A^*B - AB^*)$$

$$\neq |F(\boldsymbol{k})|^2$$

	$\Re\{F(\boldsymbol{k})\}$	$\Im\{F(\boldsymbol{k})\}$	$\lvert F(\boldsymbol{k})\rvert$
$f(\boldsymbol{r}) = a(\boldsymbol{r})$(実数)	sym.	anti-sym.	sym.
$f(\boldsymbol{r}) = ib(\boldsymbol{r})$(純虚数)	anti-sym.	sym.	sym.
$f(\boldsymbol{r}) = a(\boldsymbol{r}) + ib(\boldsymbol{r})$(複素数)	non-sym.	non-sym.	non-sym.

座標変換

	$\Re\{F(\boldsymbol{k})\}$	$\Im\{F(\boldsymbol{k})\}$	$\lvert F(\boldsymbol{k})\rvert$
移動			Identical
縮小	Scale up	Scale up	Scale up
回転	Rotation	Rotation	Rotation

移動

$$f_1(\boldsymbol{r}) = f_0(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Delta})$$

$$F_1(\boldsymbol{k}) = e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\Delta}} F_0(\boldsymbol{k})$$

$$\left(\begin{aligned} &(\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Delta}) \\ &F_1(\boldsymbol{k}) = \int f_1(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} \\ &\quad = \int f_0(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Delta}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} \\ &\quad = \int f_0(\boldsymbol{r}') e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{\Delta})}\, d\boldsymbol{r}' \\ &\quad = e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\Delta}} \\ &\qquad\quad \cdot \int f_0(\boldsymbol{r}') e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\, d\boldsymbol{r}' \end{aligned}\right)$$

拡大・縮小

$$f_1(\boldsymbol{r}) = f_0(\alpha\boldsymbol{r})$$

$$F_1(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\alpha} F_0\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\alpha}\right)$$

$$\left(\begin{aligned} &(\boldsymbol{r}' = \alpha\boldsymbol{r}) \\ &F_1(\boldsymbol{k}) = \int f_1(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} \\ &\quad = \int f_0(\alpha\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} \\ &\quad = \int f_0(\boldsymbol{r}') e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{r}'}{\alpha}}\, \frac{d\boldsymbol{r}'}{\alpha} \\ &\quad = \frac{1}{\alpha}\int f_0(\boldsymbol{r}') e^{-i\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\alpha}\right)\boldsymbol{r}'\cdot}\, d\boldsymbol{r}' \end{aligned}\right)$$

回転

$$f_1(\boldsymbol{r}) = f_0(\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{r})$$

$$F_1(\boldsymbol{k}) = F_0\left(\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{k}\right)$$

$$\left(\begin{aligned} &(\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{r}) \\ &F_1(\boldsymbol{k}) = \int f_1(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} \\ &\quad = \int f_0(\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} \\ &\quad = \int f_0(\boldsymbol{r}') e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\Theta}^{-1}\cdot\boldsymbol{r}'}\, \frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{\Theta}|} \\ &\qquad \left(\begin{aligned} &\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\Theta}^{-1} = \boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{k}, \\ &|\boldsymbol{\Theta}| = 1 \end{aligned}\right) \\ &\quad = \int f_0(\boldsymbol{r}') e^{-i(\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}'}\, d\boldsymbol{r}' \end{aligned}\right)$$