

## 1.2 離散フーリエ変換 (DFT)

$$f'(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F'_{km} e^{ik_m x} \quad (4)$$

$$F'_{km} = \frac{1}{L} \int_0^L f'(x) e^{-ik_m x} dx \quad (5)$$

$$k_m = m \frac{2\pi}{L} \quad (15)$$

(正確には「離散フーリエ級数展開」)  
DFT: Discrete Fourier Transform

$f(x)$  が等間隔のサンプリング点  
( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) のみで  
定義されている場合を考える。

$$f_n \equiv f'(x_n), \quad x_n \equiv n\Delta x$$

積分を加算記号にて近似:

$$\int_0^L \cdots dx \simeq \sum_{n=0}^{N-1} \cdots \Delta x$$

$$(L = N\Delta x)$$

$$\rightarrow F'_{km} \simeq \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ik_m x_n} \Delta x$$

$$f_n = \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+i \frac{2\pi n m}{N}} \quad (16)$$

$$F_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i \frac{2\pi n m}{N}} \quad (17)$$

# $F_m$ と $f_n$ の周期性

$$F_{m'} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi n m'}{N}} \quad (17)$$

$m' = m + N$  とすると

$$\begin{aligned} F_{m+N} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi n(m+N)}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi n m}{N}} \underbrace{e^{-i2\pi n}}_{=1} = F_m \end{aligned}$$

$F_m$  は周期性を有する。

$$F_{m \pm N} = F_m \quad (18)$$

$$f_{n'} = \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+i\frac{2\pi n' m}{N}} \quad (16)$$

$F_m$  と同様に  $f_n$  も周期性を有する。

$$f_{n \pm N} = f_n \quad (19)$$

$F_m, f_n$  の  $m$  あるいは  $n$  の  $N$  点の選びかたは、他の点の周期的に同じ点になっていなければ、どのような選びかたでも構わない。

但し、補間の場合は、サンプリング定理を考慮する必要あり。

# サンプリング定理

単一周波数の信号:

$$f_m(x) = F_m e^{ik_m x} \quad (k_m = \frac{2\pi}{L_m})$$

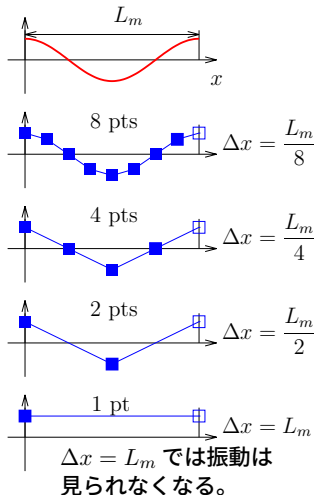
周期  $L_m$  の振動の様子を見るためには,  
 $L_m$  の中に 2 点以上必要

サンプリング定理

$$\Delta x \leq \frac{L_m}{2}$$

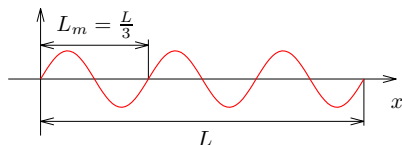
$$k_m \leq \frac{\pi}{\Delta x} \quad (\text{ナイキスト周波数})$$

(20)



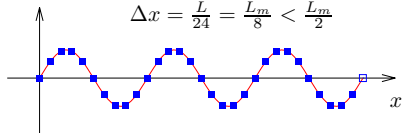
# サンプリング定理とエイリアジング (Aliasing)

Case of  $m = 3$  :



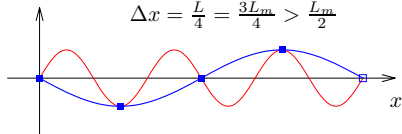
Fine sampling ( $N = 24$ )

$$\Delta x = \frac{L}{24} = \frac{L_m}{8} < \frac{L_m}{2}$$



Coarse sampling ( $N = 4$ )

$$\Delta x = \frac{L}{4} = \frac{3L_m}{4} > \frac{L_m}{2}$$



$\Delta x > \frac{L}{2} \rightarrow$  周期の異なる正弦関数に見える。  $\rightarrow$  Aliasing

$$\left( \begin{array}{l} \text{真の信号の角周波数:} \\ k_m = m \frac{2\pi}{L} \\ \text{偽信号の角周波数:} \\ k'_m = (m - N) \frac{2\pi}{L} = k_{m-N} \end{array} \right)$$

サンプリング間隔が  $\Delta x$  の場合には、 $k_m > \frac{\pi}{\Delta x}$  の信号は観測できない。

$\rightarrow$  サンプリング定理

この状態の信号は、

$$\frac{-\pi}{\Delta x} \leq k_{m'} = k_{m-N} \leq \frac{\pi}{\Delta x} \quad (|m - N| \leq N/2)$$

に aliasing された信号が見える。

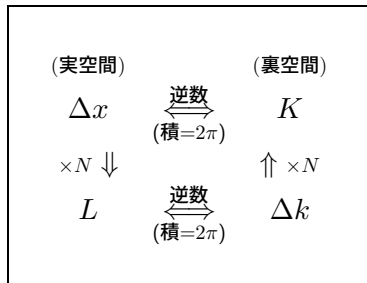
# 実空間と裏空間の定義域および離散間隔の関係

$$\begin{cases} L = x_{\max} - x_{\min} = N\Delta x & (f_n = f_{n \pm N}) \\ K = k_{\max} - k_{\min} = N\Delta k & (F_m = F_{m \pm N}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bullet \text{ サンプリング定理: } |k| < \frac{\pi}{\Delta x} \\ \bullet \text{ } k \text{ の対称性 } (k_{\min} = -k_{\max}) \\ \quad \left( k_{\max} = -k_{\min} = \frac{\pi}{\Delta x} \right) \end{cases}$$

$$K = k_{\max} - k_{\min} = \frac{2\pi}{\Delta x}$$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{x_{\max} - x_{\min}} = \frac{2\pi}{L}$$



# DFT のまとめ

離散的にサンプリングされた信号の FT(サンプル数= $N$ )

$$f_n = \sum_m F_m e^{ik_m x_n} \xrightleftharpoons[\text{INV}]{\text{FWD}} F_m = \frac{1}{N} \sum_n f_n e^{-ik_m x_n}$$

$$(x_n = n\Delta x) \qquad (k_m = m\Delta k)$$

- $f_n, F_m$  の添字  $n, m$  は共に周期  $N$  の周期性を有する
- $f_n$  および  $F_m$  の計算では、周期性により、 $m, n$  をどう選んでも同じ結果 (eg.  $n, m = \{0, \dots, N-1\}$ , or  $n, m = \{[-N/2], \dots, [N/2-1]\}$ )
- 但し,  $F_m$  については,  $|m| > N/2$  の信号は aliasing された偽の信号を意味するので, サンプリング定理を満足するようにシフト
- 補間 (内挿)

$F_m$  が求まれば, 逆変換により  $f(x|x \neq n\Delta x)$  も求めることが可能。  
 このとき, サンプリング定理を満たしていない場合には, 補間関数は aliasing された結果が現れるので,  $m$  のシフトは必須

# DFT の計算上のテクニック

$$F_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i \frac{2\pi mn}{N}} \quad (17)$$

- 単純な計算では 指数関数  $e^{-i \frac{2\pi mn}{N}}$  の計算にかかるコストが大半を占める。
- 全ての  $F_m$  を求めるためには、 $N^2$  回の演算が必要。
- 指数関数のアーギュメント

$$\frac{mn}{N} = \underbrace{\left\lfloor \frac{mn}{N} \right\rfloor}_{\text{切捨整数}} + \frac{1}{N} \underbrace{(mn) \% N}_{\substack{mn \text{ の } N \text{ に} \\ \text{よる剰余}}}$$

$$mn \% N \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

- $l \in \mathbb{Z}$  に対して  $e^{i2l\pi} = 1$  なので  

$$e^{-i \frac{2\pi mn}{N}} = e^{-i \frac{2\pi (mn) \% N}{N}}.$$

$p \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  について

$$W^p = e^{-i \frac{2\pi}{N} p}$$

を予め求めておけば、指数関数の計算は  $N$  回で済む

(このテーブルを利用した場合、乗算回数が計算コストを支配する。乗算回数が少なくなるように工夫した方法は FFT と呼ばれる。)

# 窓関数

正弦波信号:  $f_{x_n} = \cos k_1 x_n$

- $f_{x_0} = f_{x_N}$  の場合  
 $|F_{k_m}| = \frac{1}{2}(\delta_{m,n} + \delta_{-m,n})$
- $f_{x_0} \neq f_{x_N}$  の場合  
 $|F(k)|$  は  $k_1$  の回りが拡がる。

▶ 原因:

$L$  の周期性が仮定されるため。

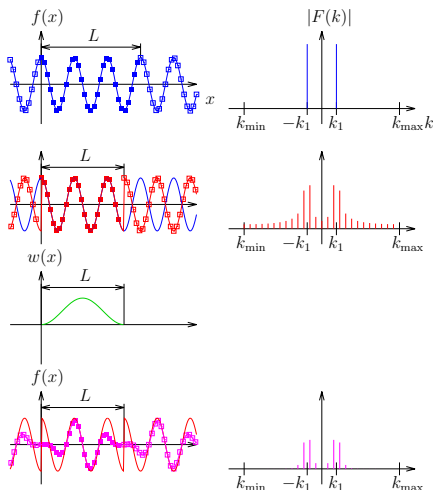
▶ 対策: 窓関数  $w(x)$  を乗じて, 端点で連続となるようにする。

$$f'(x) = w(x)f(x)$$

▶ 窓関数の例:

$$w(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2\pi(x-x_c)}{L} \right)$$

$$(x \in [x_c - L/2, x_c + L/2])$$



# 二次元 DFT

$$F_{m_x, m_y} = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} f_{n_x, n_y} e^{-i \left( \frac{2\pi m_x n_x}{N_x} + \frac{2\pi m_y n_y}{N_y} \right)} \quad (21)$$

全ての  $F_{m_x, m_y}$  を求めるためには,  $(N_x N_y)^2$  回の乗算が必要。(4 重ループ)

$$\text{(演算順序変更)} \quad F_{m_x, m_y} = \frac{1}{N_x} \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \underbrace{\left\{ \frac{1}{N_y} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} f_{n_x, n_y} e^{-i \frac{2\pi m_y n_y}{N_y}} \right\}}_{=G_{n_x, m_y}} e^{-i \frac{2\pi m_x n_x}{N_x}}$$

$$G_{n_x, m_y} = \frac{1}{N_y} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} f_{n_x, n_y} e^{-i \frac{2\pi m_y n_y}{N_y}}, \quad F_{m_x, m_y} = \frac{1}{N_x} \sum_{n_x=0}^{N_x-1} G_{n_x, m_y} e^{-i \frac{2\pi m_x n_x}{N_x}}$$

$\begin{Bmatrix} G_{n_x, m_y} \\ F_{m_x, m_y} \end{Bmatrix}$  は  $\begin{Bmatrix} f_{n_x, n_y} \\ G_{n_x, m_y} \end{Bmatrix}$  の  $\begin{Bmatrix} m_y \\ m_x \end{Bmatrix}$  に関する FT で, 全要素に対する乗算回数は  $\begin{Bmatrix} N_x N_y^2 \\ N_x^2 N_y \end{Bmatrix}$ 。

合計  $N_x N_y^2 + N_x^2 N_y$  回に減る。(それぞれ 3 重ループ, 2 ステップ)