10. 核磁気共鳴画像装置 (MRI)

- 核磁気共鳴画像装置 (MRI) :
  核磁気共鳴 (NMR) を利用して，
  特定物質の磁気双極子密度の空間分布を計測する。
  医療診断用では水素元素 (^{1}H) の密度を見る。

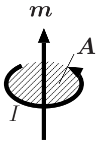
$$\text{MRI} \rightarrow \rho_{\mathrm{H}}(x, y, z)$$

- NMR (Nuclear Magnetic Resonance) spectrometry:
  NMR を利用した原子あるいは分子の結合等を分析

$$\text{NMR} \rightarrow s(|B|)$$

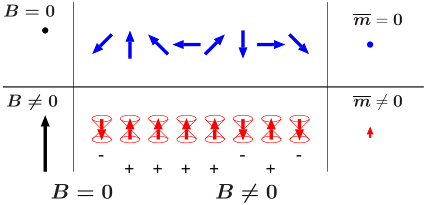
- 磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$

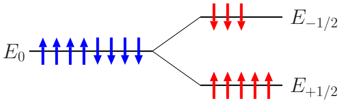
$$\boldsymbol{m} = \mu_0 I \boldsymbol{A} = \gamma \hbar \boldsymbol{J} \qquad (1)$$



$$\left(\begin{array}{l} \gamma\text{:磁気回転比，元素に依存} \\ \hbar\text{:Planck constant} \\ \boldsymbol{J}\text{:角運動量 } \hat{\boldsymbol{J}}^2 = J(J+1), \hat{J}_z = J \\ J\text{:スピン量子数 } (J = \frac{1}{2} \text{ for } {}^1\text{H}) \end{array} \right)$$

10.1 巨視的磁気双極子モーメント





- $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$
  - 個々の磁気モーメント $\boldsymbol{m}^{(i)}$ の方向はランダム
  - $\boldsymbol{M}=\overline{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{0}$

- $\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{e}_z\neq\boldsymbol{0}$
  - $\boldsymbol{m}(t)$ は回転運動
  - (異常) ゼーマン効果により $\langle\boldsymbol{m}(t)\rangle_t$ は量子化される

$$E_{\pm\frac{1}{2}}=E_0\mp\frac{1}{2}\hbar\gamma|\boldsymbol{B}|$$

  - Boltzmann 分布

$$n_{-\frac{1}{2}}=n_{+\frac{1}{2}}e^{\frac{-\Delta E}{kT}}$$

$$\to n_{+\frac{1}{2}}>n_{-\frac{1}{2}}$$

$$(\Delta n/n\sim 5\text{ppm})$$

  - $\boldsymbol{M}=\overline{\boldsymbol{m}}=|\overline{m}|\boldsymbol{e}_z\neq\boldsymbol{0}$

10.2 磁気双極子の歳差運動

磁気双極子の運動方程式

(ローレンツ力による運動方程式から導出 ($\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \propto \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v} \propto \boldsymbol{e}_\perp \times \boldsymbol{m}$))

$$\frac{d\boldsymbol{m}}{dt} = \gamma\, \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{2}$$

$\boxed{\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z \quad (|B_0| = \mathrm{const})\ \text{の場合}}$

$\boldsymbol{e}_z \cdot$(Eq.(2)) より,

$$\boldsymbol{e}_z \cdot \frac{d\boldsymbol{m}}{dt} = 0$$

$$m_z = \mathrm{const} \tag{3}$$

$\boldsymbol{m} \cdot$(Eq.(2)) より,

$$\boldsymbol{m} \cdot \frac{d\boldsymbol{m}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m}}{dt} = 0$$

$$\boldsymbol{m} \perp \frac{d\boldsymbol{m}}{dt} \tag{4}$$

$$|\boldsymbol{m}|^2 = \mathrm{const} \tag{5}$$

(Independent of $|\boldsymbol{B}|$)

$\dfrac{d(\text{Eq.(2)})}{dt}$ より

$$\begin{aligned} \frac{d^2\boldsymbol{m}}{dt^2} &= \gamma \frac{d\boldsymbol{m}}{dt} \times \boldsymbol{B} \\ &= (\gamma B_0)^2 (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{e}_z) \times \boldsymbol{e}_z \\ &= (\gamma B_0)^2 (-\boldsymbol{m} + m_z \boldsymbol{e}_z) \end{aligned} \tag{6}$$

$\boldsymbol{e}_x\cdot$(Eq.(6)) and $\boldsymbol{e}_y\cdot$(Eq.(6)) より，

$$\frac{d^2 m_n}{dt^2} + (\gamma B_0)^2 m_n = 0 \quad (n \in \{x, y\})$$

$$m_n = C_n \cos\omega_0 t + S_n \sin\omega_0 t \tag{7}$$

$$\omega_0 = \gamma B_0 \tag{8}$$

ω_0 : ラーモア周波数

$\boldsymbol{e}_x\cdot$(Eq.(2)) : $\left(\frac{dm_x}{dt} = \gamma B_0 m_y\right)$
Eq.(7) を代入

$$\omega_0(-C_x \sin\omega_0 t + S_x \cos\omega_0 t)$$
$$= \underbrace{\gamma B_0}_{=\omega_0}(C_y \cos\omega_0 t + S_y \sin\omega_0 t)$$
$$\to -C_x = S_y, \quad S_x = C_y$$

$t = 0$ において $\boldsymbol{m} = (m_\perp, 0, m_z)$ とする
Eq.(7) at $t = 0$ より

$$C_x = -S_y = m_\perp$$
$$C_y = S_x = 0$$

$$\therefore$$

$$m_x = +m_\perp \cos\omega_0 t \tag{9}$$
$$m_y = -m_\perp \sin\omega_0 t \tag{10}$$

$$m^2 = m_\perp^2 + m_z^2 = \text{const}$$

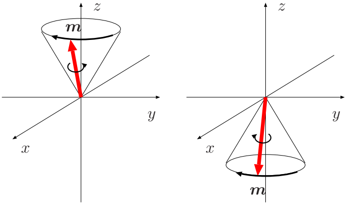
$$\therefore$$

$$m_z = \pm\sqrt{m^2 - m_\perp^2} \tag{11}$$

歳差運動

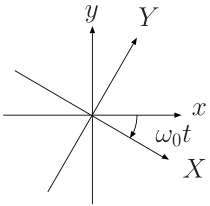
$$\frac{d\boldsymbol{m}}{dt} = \gamma\,\boldsymbol{m} \times (B_0 \boldsymbol{e}_z)$$

$$\begin{cases} m_x = +m_\perp \cos\omega_0 t \\ m_y = -m_\perp \sin\omega_0 t \\ m_z = \pm\sqrt{m^2 - m_\perp^2} \end{cases} \tag{12}$$



- z 軸回りを時計回りに円運動

回転座標系での表現



$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_X(t) = \cos(\omega_0 t)\boldsymbol{e}_x - \sin(\omega_0 t)\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_Y(t) = \sin(\omega_0 t)\boldsymbol{e}_x + \cos(\omega_0 t)\boldsymbol{e}_y \end{cases} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{m}(t) = m_\perp \boldsymbol{e}_X(t) + m_z \boldsymbol{e}_z \tag{14}$$

10.3 核磁気共鳴 (NMR)

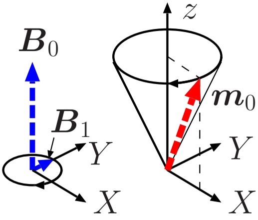
- 微小振幅の回転磁場 $(\omega = \omega_0)$ を追加

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1(t) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{B}_0 = B_0 \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{B}_1(t) = B_{1Y} \boldsymbol{e}_Y(t) \tag{16}$$

$$\left(\begin{array}{l} |\boldsymbol{B}_1(t)| \ll |\boldsymbol{B}_0| \\ B_{1Y} = \mathrm{const}, \ \ B_{1X} = 0 \end{array} \right)$$



- $\boldsymbol{m}(t)$ の定義

$$\boldsymbol{m}(t) = m_X(t)\boldsymbol{e}_X(t) + m_Y(t)\boldsymbol{e}_Y(t) + m_z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{17}$$

$$(\boldsymbol{m}(0) = m_\perp \boldsymbol{e}_X + m_{0z}\boldsymbol{e}_z)$$

- 単位ベクトルの時間微分

$$\frac{d\boldsymbol{e}_X}{dt} = -\omega_0 \boldsymbol{e}_Y, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_Y}{dt} = +\omega_0 \boldsymbol{e}_X \tag{18}$$

- 運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{m}}{dt} = \gamma\, \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$$

▶ 左辺

$$\frac{d\boldsymbol{m}}{dt} = \begin{pmatrix} \omega_0 m_Y \\ -\omega_0 m_X \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dm_X}{dt} \\ \frac{dm_Y}{dt} \\ \frac{dm_z}{dt} \end{pmatrix}$$

▶ 右辺

$$\gamma\, \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} = \gamma \begin{vmatrix} m_X & m_Y & m_z \\ 0 & B_{1Y} & B_0 \\ \boldsymbol{e}_X & \boldsymbol{e}_Y & \boldsymbol{e}_z \end{vmatrix}$$

$$= \gamma \begin{pmatrix} m_Y B_0 \\ -m_X B_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -m_z B_{1Y} \\ 0 \\ +m_X B_{1Y} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} \frac{dm_X}{dt} \\ \frac{dm_Y}{dt} \\ \frac{dm_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma B_{1Y} m_z \\ 0 \\ +\gamma B_{1Y} m_X \end{pmatrix}$$

- Y 成分：$m_Y(t) = 0$ $(\because\ m_Y(0) = 0)$
- X,z 成分：？

- $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z$ の場合

$$\begin{pmatrix} \frac{dm_x}{dt} \\ \frac{dm_y}{dt} \\ \frac{dm_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\gamma B_0 m_y \\ -\gamma B_0 m_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

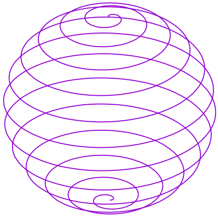
  - z 軸の回りを時計回りに回転
  - 周波数: $\omega_0 = \gamma B_0$

- $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z + B_{1Y} \boldsymbol{e}_Y(t)$ の場合

$$\begin{pmatrix} \frac{dm_X}{dt} \\ \frac{dm_Y}{dt} \\ \frac{dm_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma B_{1Y} m_z \\ 0 \\ +\gamma B_{1Y} m_X \end{pmatrix}$$

  - Y 軸の回りを時計回りに回転
  - 周波数:$\omega_{1Y} = \gamma B_{1Y}$

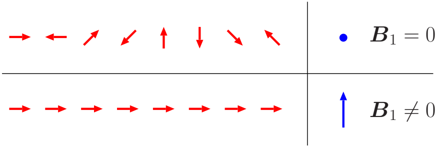
- $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z + B_{1Y} \boldsymbol{e}_Y(t)$ の場合
  $\boldsymbol{m}$ は，B_0 により z 軸回りを歳差運動しながら，B_{1Y} を常に感じる。 (共鳴)
  その結果，Y 軸を中心とした回転運動も加えられる。



磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ と回転磁場 B_1 の位相差

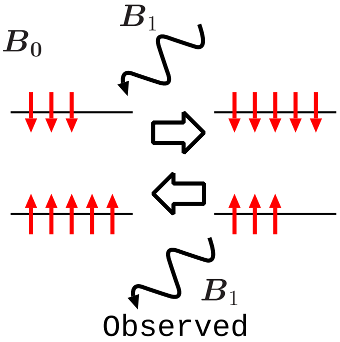
- B_0 のみの場合，全ての双極子は回転するが，位相はバラバラ。
  $\rightarrow$ $\boldsymbol{e}_X$ は双極子毎に異なる。
  $$\boldsymbol{e}_X^{(i)} \neq \boldsymbol{e}_X^{(i')}, \quad \boldsymbol{m}^{(i)} \cdot \boldsymbol{B}_1 \neq 0$$
- 回転磁場が $B_{1X}^{(i)} \neq 0$ の場合
  $$\boldsymbol{B}_1(t) = B_{1X}^{(i)} \boldsymbol{e}_X^{(i)}(t) + B_{1Y}^{(i)} \boldsymbol{e}_Y^{(i)}(t)$$
  - $B_{1X}^{(i)}$ によるトルク:
    $$\boldsymbol{m}^{(i)} \times B_{1X}^{(i)} \boldsymbol{e}_X^{(i)} = m_z^{(i)} B_{1X}^{(i)} \boldsymbol{e}_Y^{(i)} - m_Y^{(i)} B_{1X}^{(i)} \boldsymbol{e}_z$$
    $$\rightarrow \frac{dm_Y^{(i)}}{dt} = \gamma m_z^{(i)} B_{1X}^{(i)} \neq 0$$
  - このトルクにより $\boldsymbol{m}^{(i)}$ は $\boldsymbol{B}_1$ に垂直になるように回転する。
    ($|\boldsymbol{m}| = \mathrm{const}$)

- $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0$ の場合，$\boldsymbol{m}$ の X 軸は粒子毎に異なる。
  $$\boldsymbol{m}^{(i)} = m_X{}^{(i)} \boldsymbol{e}_X^{(i)} + m_z^{(i)} \boldsymbol{e}_z$$
  ただし，平均は z 成分のみ
  $$\boldsymbol{M} = \overline{\boldsymbol{m}} = \overline{m_z} \boldsymbol{e}_z$$
- $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1$ の場合，全ての粒子の X 軸は $\boldsymbol{B}_1$ と垂直方向を向く。
  $\boldsymbol{m}^{(i')} = m_X{}^{(i)} \boldsymbol{e}_X + m_z^{(i)} \boldsymbol{e}_z$ 平均は X 成分も持つ
  $$\boldsymbol{M}' = \overline{\boldsymbol{m}'} = \overline{m_X} \boldsymbol{e}_X + \overline{m_z} \boldsymbol{e}_z$$



励起と放射

- 励起
  $B = B_0$ の状態に電磁波 B_1 を照射
  $\downarrow$
  電磁波 B_1 のエネルギーを吸収し M の方向が変化
- 放射
  B_1 を停止
  $\downarrow$
  ボルツマン分布に戻る途中，M のエネルギーを電磁波 B_1 のエネルギーとして放出し元の状態に戻る。



10.4 緩和時間

- 励起電磁波停止後，周囲と相互作用し，ボルツマン分布に戻る。この過程で電磁波を放出.

- 緩和モデル
  - 縦緩和 (スピン-格子緩和)

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1}$$

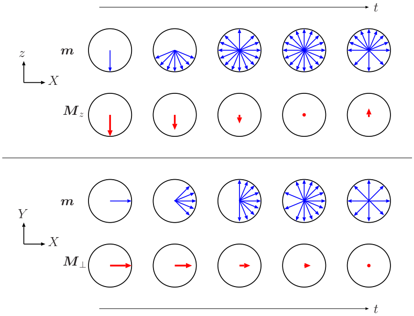
$$M_z(t) = M_0(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) + M_z(0)e^{-\frac{t}{T_1}}$$

  - 横緩和 (スピン-スピン緩和)

$$\frac{dM_\perp}{dt} = -\frac{M_\perp}{T_2}$$

$$M_\perp(t) = M_\perp(0)e^{-\frac{t}{T_2}}$$

- T_1, T_2 は核種および周囲との結合状態に依存



10.5 再構成の原理
(1) 励起スライスの選択

- z 方向磁場に**勾配**を与える　$G_z \equiv \boldsymbol{e}_z \cdot \nabla(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{e}_z)$

$$\boldsymbol{B}_z(z) = (B_0 + G_z(z - z_0))\boldsymbol{e}_z$$

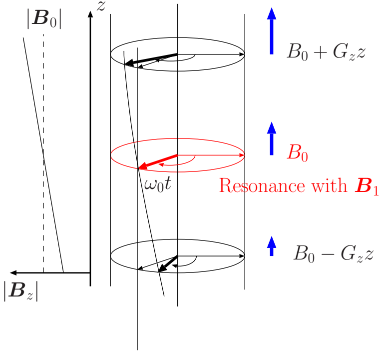
$$\omega(z) = \omega_0 + \gamma G_z(z - z_0)$$

歳差運動の周波数は z により異なる

- $\boldsymbol{B}_1(t) \propto \cos(\omega_0 t)$ の
電磁波 (回転磁場) で励起

$\downarrow$

$z = z_0$ のスライスのみが選択励起される。
他は励起されない。



(2) 放射電磁波の線積分の分離

- 励起電磁波の停止後に z 方向の磁場に (x, y) 面内の勾配を加える。

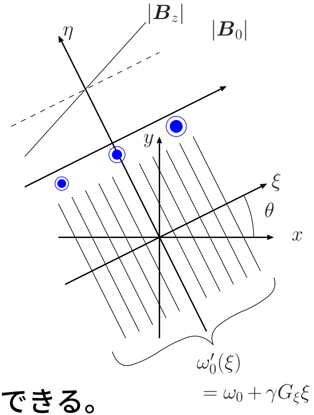
$$G_\xi \equiv \boldsymbol{e}_\xi \cdot \nabla(\boldsymbol{B}_z \cdot \boldsymbol{e}_z)$$
$$\boldsymbol{B}_z(\xi) = (B_0 + G_\xi \xi)\boldsymbol{e}_z, \quad (\boldsymbol{e}_\xi = \cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y)$$

放射電磁波の周波数は，ξ に依存。

$$\omega_0'(\xi) = \gamma(B_0 + G_\xi \xi) = \omega_0 + \gamma G_\xi \xi$$

- 観測信号：
  励起元素の密度 $\rho(x, y)$ に比例

$$s(t, \theta) = \iint \rho(x, y) e^{j\omega_0'(\xi(x,y))t}\, dx\, dy$$
$$\downarrow \mathcal{F}_t \quad \text{(詳細は次ページ)}$$
$$S(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi(\omega, \theta), \eta)\, d\eta$$
$$\equiv \text{投影データ} \quad \left(\xi(\omega, \theta) = \frac{\omega - \omega_0}{\gamma G_\xi(\theta)}\right)$$



- 勾配の方向を変える
  あらゆる方向からの投影データを得ることができる。
  $\rightarrow$ CT の再構成と同じ

$s(t,\theta)$ のフーリエ変換の算出

$$\boxed{\begin{aligned} \xi \equiv& \xi(x,y;\theta), \quad \eta \equiv \eta(x,y;\theta) \\ \omega_0'(\xi) =& \omega_0 + \gamma G_\xi \xi \equiv \omega_0'(x,y,\theta) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} s(t,\theta) &= \int_y \int_x \rho(x,y) e^{j\omega_0' t}\, dx\, dy = \int_\eta \int_\xi \rho(\xi,\eta) e^{j\omega_0' t}\, d\xi\, d\eta \\ S(\omega,\theta) &= \int s(t,\theta) e^{-j\omega t}\, dt = \int_t \int_\eta \int_\xi \rho(\xi,\eta) e^{j(\omega_0+\gamma G_\xi \xi - \omega)\,t}\, d\xi\, d\eta\, dt \\ &= \int_\eta \int_\xi \rho(\xi,\eta) \int_t e^{j(\omega_0+\gamma G_\xi \xi - \omega)\,t}\, dt\, d\xi\, d\eta \\ &= \int_\eta \int_\xi \rho(\xi,\eta) \delta(\omega_0 + \gamma G_\xi \xi - \omega)\, d\xi\, d\eta \\ &= \int_{L_\eta} \rho(\xi,\eta)\, d\eta \quad \left(L_\eta \in \left\{ \boldsymbol{r}(\xi,\eta;\theta) \,\middle|\, \xi = \frac{\omega-\omega_0}{\gamma G_\xi} \right\} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S(\omega,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi(\omega,\theta),\eta)\, d\eta, \quad \xi(\omega,\theta) = \frac{\omega-\omega_0}{\gamma G_\xi(\theta)}}$$