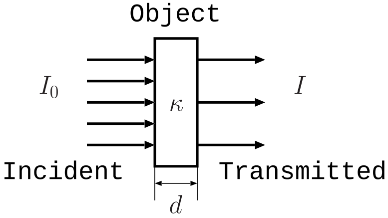
9. コンピュータトモグラフィー (CT)
9.1 X 線の吸収

- X 線写真



$$I(y) = I_0 e^{-\kappa(y)d}$$

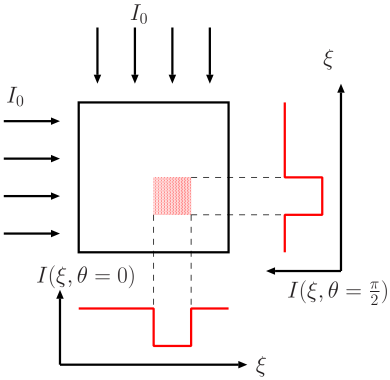
- κ：減弱係数
  X 線の場合
  原子番号に依存
  (重元素 $\to \kappa$ 大)

- κ が深さに依存する場合

$$\kappa d \to \int_0^d \kappa(x,y)\,dx$$
$$\to \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(x,y)\,dx$$
$$(\kappa(x,y) = 0 \quad \text{吸収体以外})$$

- X 線写真では，κ の光路に沿う積分のみが求められる。

9.2 複数方向からの投影

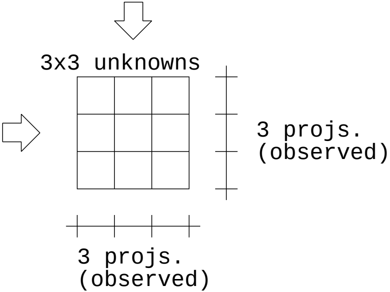


複数方向からの投影データを用いれば，深さ方向の κ の分布も含めた断層像を求めることができる。

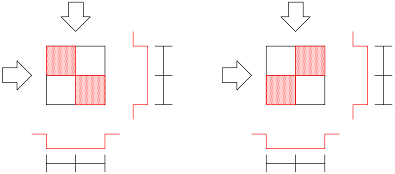
$$\Downarrow$$

Computed Tomography
(計算により求めた断層像)

投影データと内部分布の数



未知数の数 > 観測値
→ 解けない



未知数の数 = 観測値
→ 区別できない

より多くの情報を得るために入射方向 (θ) を変えた観測を行う

$$\theta \in [0, \pi]$$

9.3 簡単な投影と逆投影の例
順投影 (測定過程)

順投影 $\equiv$ 光路に沿った積分

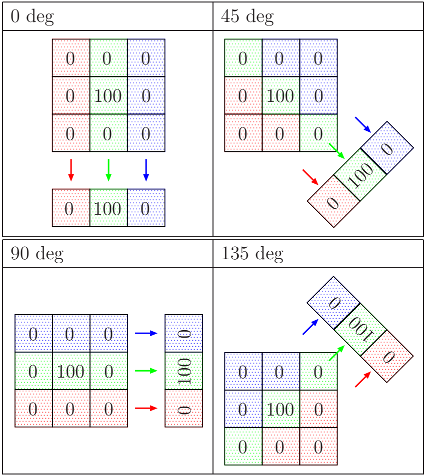
$$p(\xi,\theta) = \int_\eta \kappa(x,y)\, d\eta_\theta$$

$$(x \equiv x(\xi,\theta),\ \ y \equiv y(\xi,\theta))$$

$\rightarrow$ **投影方向の積算で代用**

0	0	0
0	100	0
0	0	0

$\Longrightarrow$



逆投影　(1) 単純逆投影

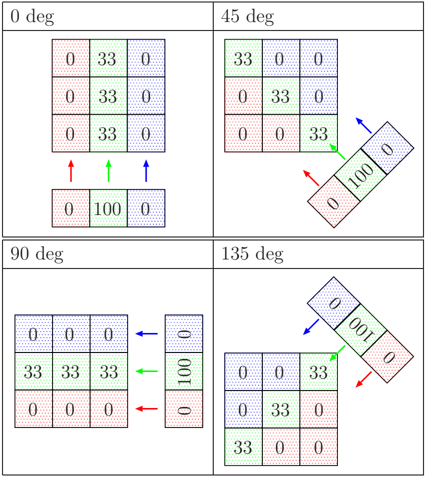
1. それぞれの角度について，投影データの平均を，光路上の画素に配置
2. マップした結果の平均を取る

8	8	8
8	33	8
8	8	8

元の分布より鈍っている

元の分布

0	0	0
0	100	0
0	0	0



逆投影　(2) フィルター付逆投影

単純逆投影では，再構成結果が平滑化されている。
この平滑化を低減するするために，投影データに，変化を強調するような
フィルターを掛ける。

エッジ強調フィルター

$$
\begin{aligned}
g_n &= f_n - k f''_n \\
&= f_n - k(f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1}) \\
&= -k f_{n-1} + (2k+1) f_n - k f_{n+1}
\end{aligned}
$$

$(k = 1)$

$$
g_n = \sum_{i=-1}^{+1} w_i f_{n-i}
$$

$$
(w_{-1}, w_0, w_{+1}) = (-1, +3, -1)
$$

フィルター付逆投影

1. **投影データのエッジ強調 p'**

(e.g.) $p'_j = \sum_{i=-1}^{+1} w_i p_{j-i}$

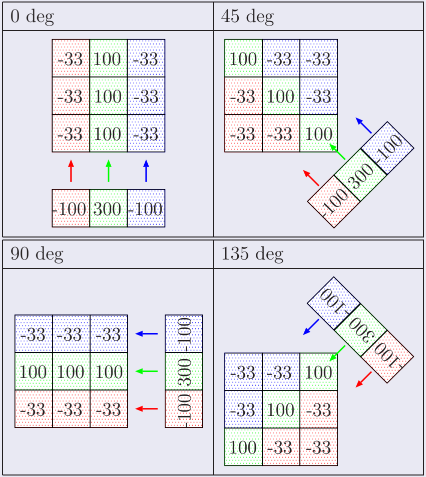
$(w_{-1}, w_0, w_{+1}) = (-1, 3, -1)$

p	0	100	0
p'	-100	300	-100

2. **新しい p' を用いて逆投影**

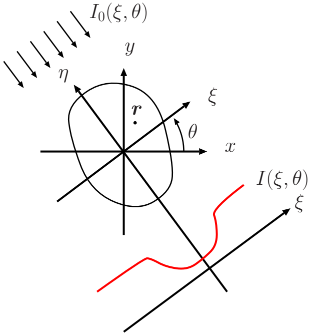
0	0	0
0	100	0
0	0	0

$\Longleftarrow$



この例では元の分布と一致

9.4 ラドン変換 (Radon Transform)
座標系



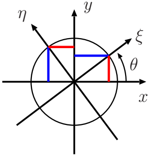
点 $\boldsymbol{r}$ の表示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y \\ &= \xi\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\xi}} + \eta\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\eta}}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{e}_x\cdot$ を作用：

$$\begin{aligned} & x\,\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y \\ &= \xi\,\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\xi}} + \eta\,\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\eta}}\end{aligned}$$

$$x = \xi\cos\theta - \eta\sin\theta$$



$$\begin{cases} x = +\xi\cos\theta - \eta\sin\theta \\ y = +\xi\sin\theta + \eta\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = +x\cos\theta + y\sin\theta \\ \eta = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

ラドン変換 (Radon Transform)

- 投影データ (known)

$$I(\xi,\theta) = I_0\, e^{-\int_L \kappa(\boldsymbol{r})\, dl}$$

$$L \in \{\boldsymbol{r}(\xi,\eta;\theta) \mid \xi = \xi'(\mathrm{const})\}$$

- Sinogram (known)

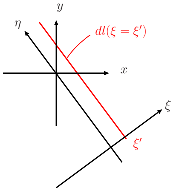
$$p(\xi,\theta) \equiv -\log \frac{I(\xi,\theta)}{I_0}$$

- ラドン変換
二次元空間の特定の直線上の積分

$$p(\xi,\theta) = \int_L \kappa(\boldsymbol{r}(\xi,\theta))\, dl$$

- 線積分から
二次元領域積分
への拡張

$$\xi' = x\cos\theta + y\sin\theta$$



$$\begin{aligned}\int_L [\cdots]\, dl &= \int_{\xi=\xi'} [\cdots]\, d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\cdots]\delta(\xi-\xi')\, d\xi'\, d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\cdots]\delta(\xi-\xi'(x,y))\, dx\, dy \\ &= \iint [\cdots]\delta(\xi-(x\cos\theta+y\sin\theta))\, dx\, dy\end{aligned}$$

9.5 投影切断定理

- 投影データ (Sinogram)

$$p(\xi,\theta) = \iint \kappa(x,y)\delta(\xi - (x\cos\theta + y\sin\theta))\,dx\,dy \tag{1}$$

- ξ に関する FT

$$\begin{aligned} P(k_\xi,\theta) &= \iiint \kappa(x,y)\delta(\xi - (x\cos\theta + y\sin\theta))e^{-jk_\xi \xi}\,dx\,dy\,d\xi \\ &= \iint \kappa(x,y)e^{-jk_\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)}\,dx\,dy \end{aligned} \tag{2}$$

二次元フーリエ変換の極座標表現

- 順変換

$$F(k_x, k_y) = \iint f(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy \qquad (k_x = k\cos\theta, \quad k_y = k\sin\theta)$$

$$= \iint f(x, y) e^{-jk(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dx\, dy \equiv F'(k, \theta) \tag{3}$$

- 逆変換

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint F(k_x, k_y) e^{+j(k_x x + k_y y)}\, dk_x\, dk_y \qquad \left(\iint dk_x\, dk_y = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} k\, d\theta\, dk\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F'(k, \theta) e^{+jk(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, k\ d\theta\, dk \tag{4}$$

(2) 式と (3) 式と同じ形

切断投影定理

$P(k_\xi, \theta)$ は $\kappa(x, y)$ の二次元フーリエ変換を
極座標表現したものと一致する

$P(k_\xi, \theta)$ は既知なので (4) 式で逆変換すれば，$\kappa(x, y)$ が得られる。

$$\kappa(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} P(k_\xi, \theta) e^{+jk_\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, k_\xi \; d\theta\, dk_\xi \qquad (5)$$

逆向きからの投影

$$\kappa(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} P(k_\xi,\theta)e^{+jk_\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)}\, k_\xi\ d\theta\, dk_\xi$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} P(k_\xi,\theta)e^{+jk_\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)}\, |k_\xi|\ d\theta\, dk_\xi$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} k_\xi\, d\theta\, dk_\xi = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} k_\xi\, d\theta\, dk_\xi + \int_0^{\infty}\int_{\pi}^{2\pi} k_\xi\, d\theta\, dk_\xi$$

逆向き投影

$$\begin{pmatrix} \theta \to \theta\pm\pi \\ \xi \to -\xi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p(\xi,\theta\pm\pi) = p(-\xi,\theta) \\ P(k_\xi,\theta\pm\pi) = P(-k_\xi,\theta) \\ e^{+jk_\xi(x\cos(\theta\pm\pi)+y\sin(\theta\pm\pi))} = e^{-jk_\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)} \end{pmatrix}$$

$$\text{2nd Term} = \int_0^{\infty}\int_{\pi}^{2\pi} P(k_\xi,\theta)e^{+jk_\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)} k_\xi\, d\theta\, dk_\xi \qquad (\theta' = \theta-\pi)$$
$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} P(-k_\xi,\theta')e^{-jk_\xi(x\cos\theta'+y\sin\theta')} k_\xi\, d\theta'\, dk_\xi \qquad (k'_\xi = -k_\xi)$$
$$= \int_0^{-\infty}\int_0^{\pi} P(k'_\xi,\theta')e^{+jk'_\xi(x\cos\theta'+y\sin\theta')} (-k'_\xi)\, d\theta'\, (-dk'_\xi)$$
$$= \int_{-\infty}^{0}\int_0^{\pi} P(k'_\xi,\theta')e^{+jk'_\xi(x\cos\theta'+y\sin\theta')} |k'_\xi|\, d\theta'\, dk'_\xi$$

9.6 フーリエ変換を用いた再構成

$$\kappa(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\pi} P(k_\xi,\theta)e^{+jk_\xi \overbrace{(x\cos\theta + y\sin\theta)}^{\xi}} |k_\xi| \; d\theta \, dk_\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[P(k_\xi,\theta)|k_\xi|]\, e^{+jk_\xi\xi}\, dk_\xi}_{=\mathcal{F}^{-1}_{k_\xi}\left\{P((k_\xi,\theta)|k_\xi|\right\}\equiv q(\xi,\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(\xi(x,y),\theta)\, d\theta}_{\text{平均}}$$

$$q(\xi(x,y),\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}[P(k_\xi,\theta)|k_\xi|]\, e^{+jk_\xi(x\cos\theta+y\sin\theta)}\, dk_\xi$$

$$\boxed{\kappa(x,y) = \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{F}^{-1}_{k_\xi}\left\{\mathcal{F}_\xi\left\{p(\xi,\theta)\right\}_\xi H(k_\xi)\right\}_{k_\xi}\right\rangle_\theta}$$

$(H(k_\xi) = |k_\xi|$ Ramp function の場合)

1. Sinogram :
   $p(\xi, \theta)$
2. 順 FT (ξ について) :
   $$P(k_\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \theta) e^{-jk_\xi \xi} \, d\xi$$
3. フィルタリング (重み $|k_\xi|$) :
   $|k_\xi| P(k_\xi, \theta)$
4. 逆 FT (k_ξ について) :
   $$q(\xi, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(k_\xi, \theta) |k_\xi| e^{+jk_\xi \xi} \, dk_\xi$$
5. 逆投影 (Backward projection)(座標変換+θ 積分) :
   $$\kappa(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x \cos\theta + y \sin\theta, \theta) \, d\theta$$

一つの θ について二回のフーリエ変換 (順+逆) が必要

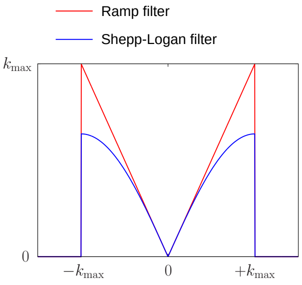
Filtered Back-Projection

- 逆 FT の直前に $|k_\xi|$ を乗じている
- この $|k_\xi|$ をスペクトル空間のフィルターと見なし，FT による方法は，Filtered Back-Projection (FBP) 法と呼ばれる。
- 実際の計算では，$k_\xi \in [-\infty, \infty] \to [-k_{\max}, +k_{\max}]$.
- $k_{\max}$ は，サンプリング間隔から決まるナイキスト周波数

- 高周波成分によるリンギング (アーチファクト) を低減するために，$|k_\xi|$ の代わりに，別のフィルターを用いる場合もある。

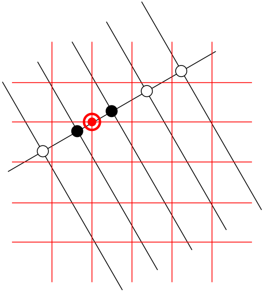
(e.g. Shepp-Logan filter)

$$H(k_\xi) = \frac{2k_{\max}}{\pi} \sin\left|\frac{\pi k_\xi}{2k_{\max}}\right|$$



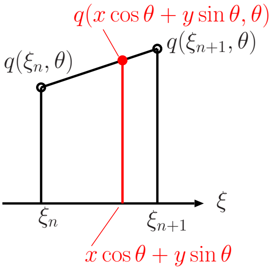
離散データの取扱い

- $p(\xi_n, \theta_m) = p(n\Delta\xi, m\Delta\theta)$ (n, m) : 整数
- $\kappa(x_i, y_j) = \kappa(i\Delta x, j\Delta y)$ (i, j) : 整数



- $q(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)$ を $q(\xi_n, \theta)$ から求めるためには，内挿が必要

e.g. (ξ の内挿)



畳み込み積分による再構成

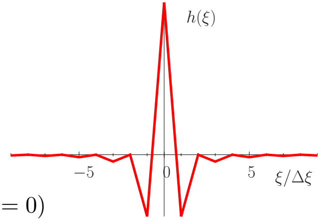
$$\left\{\begin{array}{l} c(x) = \int a(x')b(x-x')\,dx' \\ C(k) = A(k)B(k) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad c(x) = \frac{1}{2\pi}\int A(k)B(k)e^{+jkx}\,dk$$

$$q(\xi,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-k_{\max}}^{k_{\max}} P(k_\xi,\theta)H(k_\xi)e^{+jk_\xi\xi}\,dk_\xi = \int_{-\xi_{\max}}^{\xi_{\max}} p(\xi',\theta)h(\xi-\xi')\,d\xi'$$

- If $H(k_\xi) = |k_\xi|$,

$$h(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-k_{\max}}^{k_{\max}} |k_\xi|e^{+jk_\xi\xi}\,dk_\xi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}k_{\max}^2 & (\xi = 0) \\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{k_{\max}}{\xi}\sin(k_{\max}\xi) + \dfrac{1}{\xi^2}\left(\cos(k_{\max}\xi) - 1\right) & (\xi \neq 0) \end{cases}$$



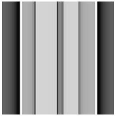
周囲の値を減算 $\Leftrightarrow$ **エッジ強調**

1. Sinogram : $p(\xi, \theta)$
2. **畳み込み積分** :
$$q(\xi, \theta) = \int p(\xi', \theta) h(\xi - \xi')\, d\xi'$$
3. **逆投影** :
$$\kappa(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\, d\theta$$

$\kappa(x, y)$

$p'(x, y; 0)$

$q'(x, y; 0)$



$\left(\begin{array}{l} p', q' \text{ : 表示のためコントラスト強調後} \\ (\mathrm{erf}(I/\sigma)) \end{array}\right)$

一つの θ について一回の畳み込み積分のみ。
フーリエ変換は不要。

乗算回数 (θ 毎)		
フーリエ変換 (2 回)	DFT × 2	$2N^2$
	FFT × 2	$2N \log N$
畳み込み積分	全点	N^2
	近傍 M 点 ($M \ll N$)	MN

$\rightarrow$ **近傍の畳み込みのみなら DFT より高速**

Filtered Back-projection と単純逆投影

- Filtered Back-Projection

$$\kappa(x,y) = \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{F}_{k_\xi}^{-1}\left\{\mathcal{F}_\xi\left\{p(\xi,\theta)\right\}_\xi H(k_\xi)\right\}_{k_\xi}\right\rangle_\theta$$

- 単純逆投影

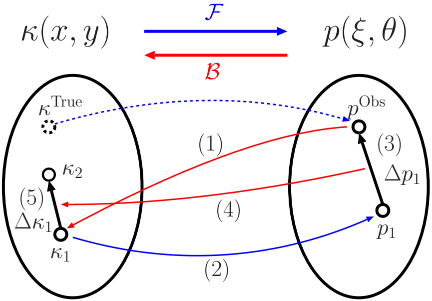
$$\begin{aligned} H(k) &= 1 \\ \kappa(x,y) &= \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{F}_{k_\xi}^{-1}\left\{\mathcal{F}_\xi\left\{p(\xi,\theta)\right\}_\xi\right\}_{k_\xi}\right\rangle_\theta = \frac{1}{2}\langle p(\xi,\theta)\rangle_\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi p(\xi,\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

  - FT は不要 → 高速
  - 再構成された分布にぼけが発生してしまう。

→ 数値的な順投影と，逆投影を繰り返す。

9.7 逐次近似再構成

逆投影で得られた再構成結果を，順投影すれば，投影データの誤差の評価が可。
この誤差を再度逆投影し，元の再構成像に加え，再構成像を修正。
逆投影には高速な，単純逆投影を用いる。



(1) **投影データを逆投影** : $\kappa_1 = \mathcal{B}\left\{p^{\mathrm{Obs}}\right\}$
(2) **再構成結果を順投影** : $p_1 = \mathcal{F}\left\{\kappa_1\right\}$
(3) **投影データの不足分** : $\Delta p_1 = p^{\mathrm{Obs}} - p_1$
(4) **不足分を逆投影** : $\Delta\kappa_1 = \mathcal{B}\left\{\Delta p_1\right\}$
(5) **再構成像を修正** : $\kappa_2 = \kappa_1 + \alpha\Delta\kappa_1$

(α : 安定化のための緩和係数 $0 < \alpha \leq 1$)

単純逆投影

- Sinogram

$$p(\xi_n, \theta_m) = \int_{L_{nm}} \kappa(x, y)\, dl \simeq \overline{\kappa(x, y \in L_{nm})} \Delta l_{nm}$$

$$\to \overline{\kappa(x, y \in L_{nm})} = \frac{p(\xi_n, \theta_m)}{\Delta l_{nm}} \qquad \left(\Delta l_{nm} = \int_{L_{nm}} dl \right)$$

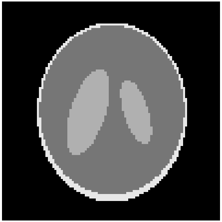
- 光路 L_{nm} 上の全ての pixel に，投影データの 1pixel あたりの平均値をマッピング

$$\kappa(x_i, y_j) = \frac{1}{N_n} \sum_m \sum_n a_{i,j,n,m} \frac{p(\xi_n, \theta_m)}{\Delta l_{nm}}$$

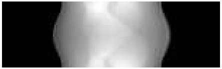
$a_{i,j,n,m}$: pixel (x_i, y_j) と幅 $\Delta\xi$ のビームの光路 L_{nm} が重なりあう面積の割合

9.8 再構成シミュレーション例

True $\kappa(x,y)$



Sinogram $p(\xi,\theta)$

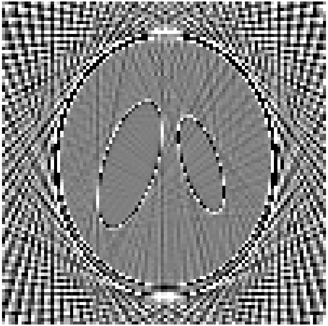


$\kappa(x,y) \in [0,2]$,
$N_x = N_y = 100$,
$N_\xi = 100$,
$N_\theta = 45 (\Delta\theta = 4\text{deg})$

Filtered Back-Projection (Filter : Ramp function)

$\kappa(x,y)$ [0,2]

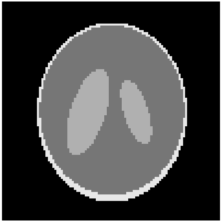
$\Delta\kappa(x,y)$ [-0.2,+0.2]



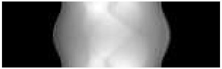
$||\Delta\kappa||_2 \equiv \sqrt{\langle \Delta\kappa^2 \rangle} = 0.15$

Line artifact

True $\kappa(x, y)$



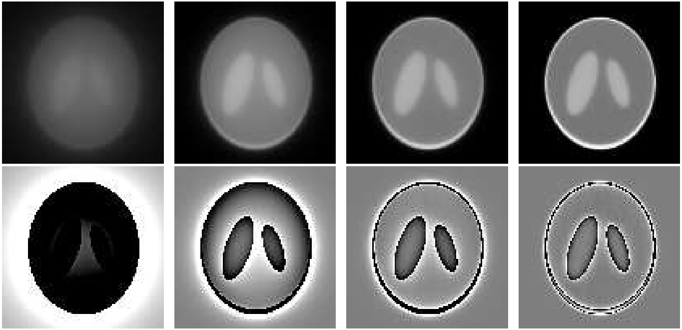
Sinogram $p(\xi, \theta)$



$\kappa(x, y) \in [0, 2]$,
$N_x = N_y = 100$,
$N_\xi = 100$,
$N_\theta = 45(\Delta\theta = 4\mathrm{deg})$

逐次近似再構成

$N = 1$　$N = 2$　$N = 10$　$N = 20$



$||\Delta\kappa||_2 = 0.42$　$||\Delta\kappa||_2 = 0.25$　$||\Delta\kappa||_2 = 0.17$　$||\Delta\kappa||_2 = 0.11$

エッジのぼけの緩和