画像工学特論

富岡　智

tom@qe.eng.hokudai.ac.jp

1. フーリエ変換 (級数展開)

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{時間 } t \text{ [s]} \Longleftrightarrow \text{周波数 } \omega \text{ [rad/s]} \\ \text{空間 } \boldsymbol{r} \text{ [m]} \Longleftrightarrow \text{ 波数 } \boldsymbol{k} \text{ [rad/m]} \end{array}}$$

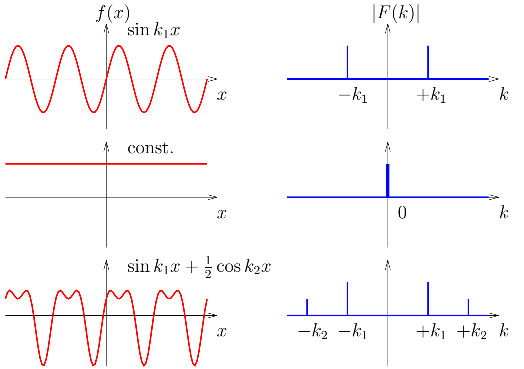
◎フーリエ変換のメリット

- データの特徴の把握 (周期性)
- 情報の伝達機構の理解
  (畳み込み積分 $\leftrightarrow$ フーリエ空間での積)
- フィルタリング (雑音除去，特徴点強調)
- 数学的な取扱いの容易さ

⋮

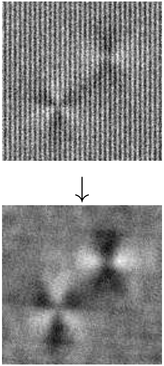
◯ データの特徴

例:



スペクトル $|F(k)|$ より，関数 $f(x)$ の周期性が解る。

◯ フィルタリング例



1.1 複素フーリエ級数展開

完備直交関数系による展開

複素関数 $f(\theta); \theta \in [-\pi, +\pi]$ が以下を満たすとき，

- $\int_a^b |f(\theta)| \, d\theta < \infty$
- $f(-\pi) = f(+\pi)$,

$f(\theta)$ は，基底関数列 $e^{im\theta}$ で展開できる。

$$f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{im\theta} \quad (1)$$

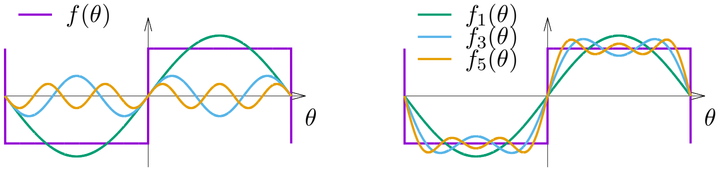
$$F_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-im\theta} \, d\theta \quad (2)$$

$$(f \in \mathbb{C}, \ \theta \in \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{Z}(\text{整数}))$$

完備性

$$f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{im\theta} \qquad \text{(完備性)} \tag{1}$$

証明：(略) $\lim_{N\to\infty} f_N(\theta) - f(\theta) = 0$ **を示せば良い**



$f_N(x)$: 有限項で打ち切った場合の近似関数

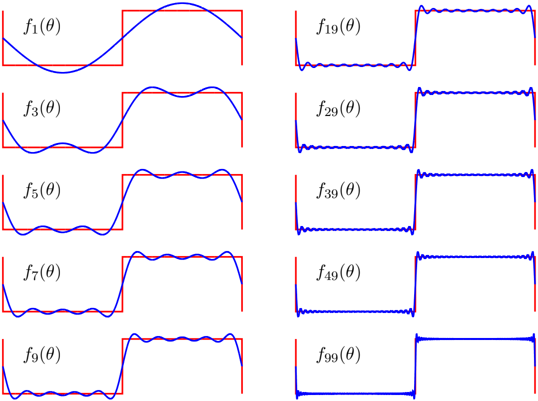
$$\left(f_N(\theta) = \sum_{m=-N}^{N} F_m e^{im\theta} \right)$$

※ $f(\theta)$ が区間内で不連続，あるいは，
両端が不一致 ($f(-\pi) \neq f(+\pi)$) であっても構わない。
この場合，不連続点での値は平均とみなされる。(ディリクレの定理)

Gibbs 現象

- 有限項で打ち切った関数 $f_N(\theta)$ は，不連続点近傍で減衰振動する誤差をもつ。

$$f_N(\theta) = \sum_{m=-N}^{N} F_m e^{im\theta}$$



直交性

$$f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{im\theta} \tag{1}$$

$$F_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-im\theta}\, d\theta \tag{2}$$

展開係数が (2) 式となることは，次の直交性を用いて示すことができる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m')\theta}\, d\theta = \delta_{m,m'} = \begin{cases} 1 & (m = m') \\ 0 & (m \neq m') \end{cases} \qquad \textbf{(直交性)} \tag{3}$$

区間のスケーリング ($\theta \in [-\pi, +\pi] \to x \in [-l, l]$)

$$f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{im\theta} \quad (1)$$

$$F_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-im\theta}\, d\theta \quad (2)$$

$$\Rightarrow \left(x = \frac{l}{\pi}\theta, \qquad k_m = m\frac{\pi}{l} \in \mathbb{R} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{k_m} e^{ik_m x} \quad (4)$$

$$F_{k_m} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-ik_m x}\, dx \quad (5)$$

※ $f(x)$ と F_{k_m} の次元は同じ

(
* 初等関数の独立変数は無次元　(例外: $\log(x)$ の独立変数 x)
* 初等関数自体も無次元
)

原点の移動 ($x \in [-l, +l] \to x' \in [-l+a, l+a]$)

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{k_m} e^{ik_m x} \tag{4}$$

$$F_{k_m} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-ik_m x}\, dx \tag{5}$$

$$\xrightarrow{x \to x+a}$$

$$f(x+a) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{k_m} e^{ik_m (x+a)}$$

$$F_{k_m} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x+a) e^{-ik_m (x+a)}\, dx$$

$$\Downarrow \quad (x' = x + a)$$

$$f(x') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{k_m} e^{ik_m x'} \tag{6}$$

$$F_{k_m} = \frac{1}{2l} \int_{-l+a}^{l+a} f(x') e^{-ik_m x'}\, dx' \tag{7}$$

積分区間が変わるだけ

フーリエ変換 ($l \to \infty$)

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{k_m} e^{ik_m x}, \quad F_{k_m} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-ik_m x}\, dx \qquad \left(k_m = m\frac{\pi}{l} = m\Delta k\right)$$

$l \to \infty$ とすると，$\Delta k \to 0$ ，離散値 $k_m \to$ 連続値 k，， $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \cdots \Delta k \to \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\, dk$

$$f(x) = \lim_{\substack{l\to\infty,\\ \Delta k\to 0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{F_{k_m}}{\Delta k} e^{ik_m x}\Delta k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{\substack{l\to\infty,\\ \Delta k\to 0}} \frac{F_{k_m}}{\Delta k} \right) e^{ikx}\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(k) e^{ikx}\, dk,$$

$$\hat{F}(k) = \lim_{\substack{l\to\infty,\\ \Delta k\to 0}} \frac{F_{k_m}}{\Delta k} = \lim_{\substack{l\to\infty,\\ \Delta k\to 0}} \frac{l}{\pi}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-ik_m x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(k) e^{ikx}\, dk && \text{(逆変換)} \quad (8) \\ \hat{F}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx && \text{(順変換)} \quad (9) \end{aligned}}$$

※ $f(x)$ と $\hat{F}(k)$ の次元は異なる。

$$\left([f(x)] = \left[k\hat{F}(k)\right], \ \left[\hat{F}(k)\right] = [xf(x)] \right)$$

連続関数の直交性

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-m')\theta}\,d\theta = \delta_{m,m'} \tag{3}$$

$$\frac{1}{2l}\int_{-l+a}^{l+a} e^{i(k_m-k_{m'})x}\,dx = \delta_{m,m'} \tag{10}$$

$l \to \infty$ の場合の
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\,dx$$ は？

(10) 式の $l \to \infty$ より $\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l+a}^{l+a} e^{i(k_m-k_{m'})x}\,dx = \delta_{m,m'}$

(10) 式の両辺に $2l$ を乗じてから $l \to \infty$

$$\text{左辺} = \lim_{l\to\infty}\int_{-l+a}^{l+a} e^{i(k_m-k_{m'})x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\,dx$$

$$\text{右辺} = \lim_{l\to\infty} 2l\,\delta_{m,m'} = \begin{cases} \infty & (k = k') \\ 0 & (k \neq k') \end{cases}$$

(右辺は $\delta(k-k')$ と置けるか？
非対称関数だったのに対称関数
のように扱って良いのか？
答えは正の実数か？)

フーリエ順 (逆) 変換の結果を逆 (順) 変換したものは，元の関数に戻らなければならない。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx}\, dk \tag{8}$$
$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx \tag{9}$$

(8) 式を (9) 式の右辺に代入し，積分順序の入れ換え

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(k') e^{ik'x}\, dk' \right) e^{-ikx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(k') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k'-k)x}\, dx \right) dk'$$

δ 関数は，以下の性質を持つ関数として定義されている。

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k') \delta(k' - k)\, dk'$$

これらを比較すると以下の直交性が導かれる。

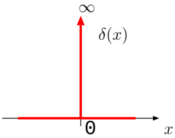
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\, dx = \delta(k - k') \tag{11}$$

ディラクの δ 関数

ディラクの δ 関数の定義

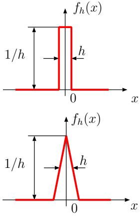
$$\delta(x) = \begin{cases} \infty (x = 0) \\ 0 \ (x \neq 0) \end{cases} \qquad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \qquad (13)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x')\, dx = f(x') \qquad (14)$$

例) $\delta(x) = \lim_{h \to 0} f_h(x)$



δ 関数の次元

$$[\delta(x)] = \left[\frac{1}{x}\right]$$

積分の評価における性質 ($f(x)$ を乗じて積分したものが成り立つ性質)

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta^{(1)}(-x) = -\delta^{(1)}(x), \quad x\delta(x) = 0, \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad \cdots$$

フーリエ変換のさまざまな表現

順変換，逆変換を一回ずつ作用させて元に戻ればよい。
○指数関数の変数の符号の任意性

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{\pm ikx}\, dk \\ F(k) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\mp ikx}\, dx \end{cases}$$

○係数の任意性

$$\begin{cases} f(x) = A\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{+ikx}\, dk \\ F(k) = A'\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx \end{cases}$$

$AA' = \dfrac{1}{2\pi}$ を満たせばよい

A	A'	特徴
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	数学的に対称
$\frac{1}{2\pi}$	1	$k = 2\pi\bar{k}$ とすれば係数はともに 1
1	$\frac{1}{2\pi}$	